I A 12

I-1539

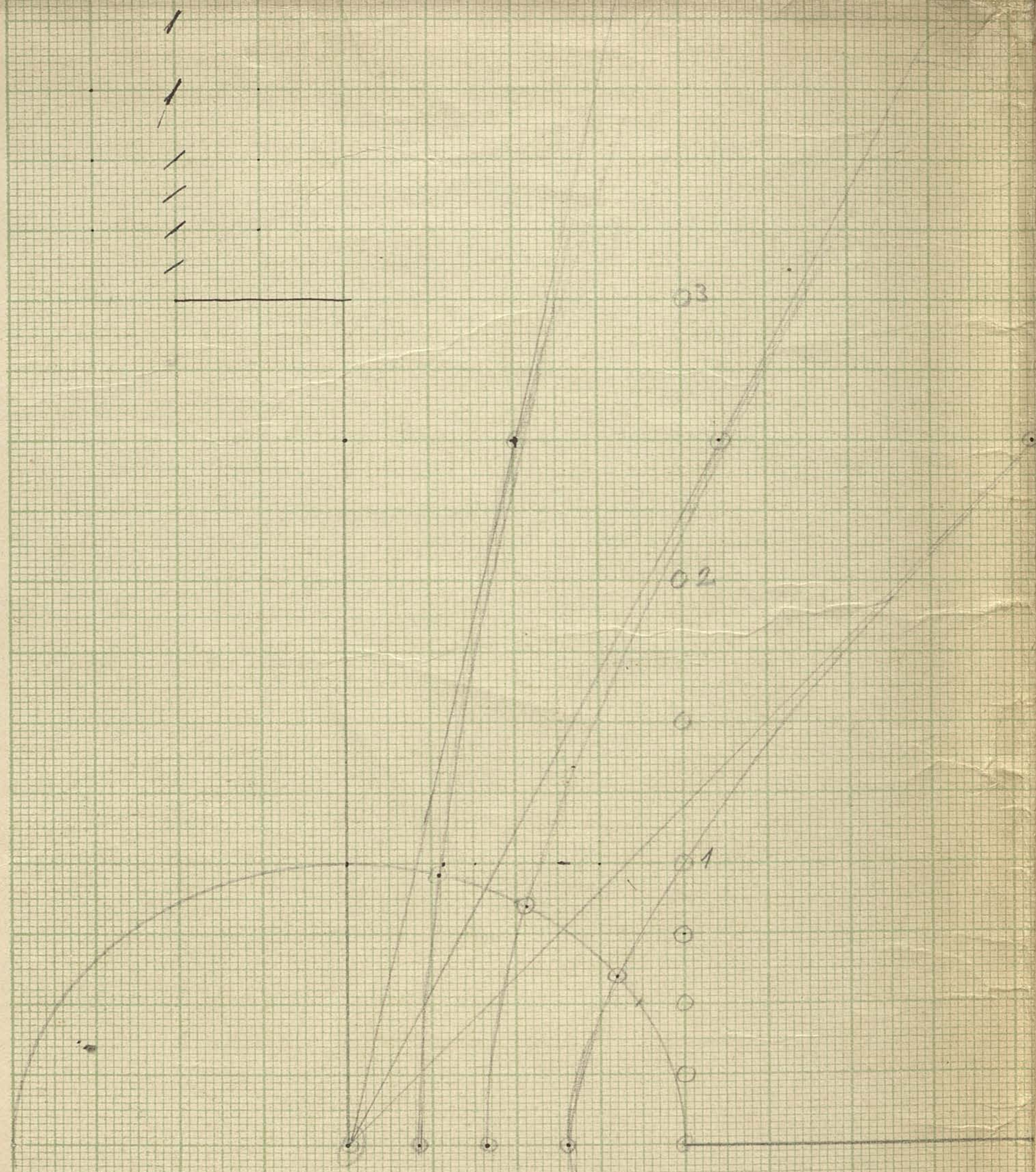
Rękopisy

Rozpraw hydrodynamicznych

[30 b]

II. Korrektur

1


3
2
1

[Brulion
por. 306]

por. 2 kart.

Maryan Smoluchowski: Przyczynek do teoryi ruchów cieczy lepkich, a zwłaszcza zagadnień dwuwymiarowych.

W pierwszej części (pracy tej) autor rozpatruje warunki graniczne, określające w jednoznaczny sposób ruch powolny stacyjny cieczy lepkiej. Wiadomo, że według badań Helmholtza, Kortwega i Rayleigha do określenia zagadnień tego rodzaju służyć by miało podanie rozkładu prędkości na powierzchni otaczającej badaną część przestrzeni. Autor zauważa jednak, że sposób ten nie daje się zastosować w razie jeżeli owa powierzchnia ~~[illegible]~~ obejmuje przestrzeń nieskończoną, a z drugiej strony, że w praktyce doświadczalnej nie prędkości tylko ciśnienia hidrostatyczne są dane, które działając na powierzchnię cieczy w ~~[illegible]~~ zbiornikach (ile możności dużych) powodują ruch określony w przewodzie łączącym. Autor wprowadza wobec tego pojęcie ruchów „skończonych", do których wszystkie w praktyce możliwe należą, i dowodzi że istotnie do jednoznacznego określenia takiego ruchu „skończonego" wystarcza w ogólności podanie rozkładu ciśnienia działającego w odległości nieskończonej.

W drugiej części autor zajmuje się specyalnie ruchami dwuwymiarowymi, które stosunkowo mało dotychczas były badane. Wyprowadza ~~ogólną~~ pewną dogodną do użytku formę ogólnego rozwiązania takich zagadnień i pokazuje zastosowanie jej na kilku przykładach ~~[illegible]~~ ruchu odbywającego się w obecności nieskończonej ściany płaskiej.

Są to mianowicie: przepływ cieczy przez otwór (szparę) w ścianie płaskiej, i ruch wzdłuż takiej ściany zaopatrzonej otworem, i dalsze przykłady, z tamtych otrzymane przez specyalizacyę, jak ruch cieczy w otoczeniu (bliskości) krawędzi matematycznie

w przestrzeni między ścianami stykającymi się pod kątem ostrym

ostrej, wypływ cieczy z źródła, ~~umieszczonego w~~ znajdującego się w miejscu ich przecięcia. Autor wskazuje także na związek ~~tych~~ wyników otrzymanych z ~~pracami~~ obliczeniami Rayleigha i Sampsona i innych nieco analogicznych.

4

W rozprawie podatem ~~opracowane~~ resultaty badania doświadczalnego zjawisk występujących przy wypływie cieczy, które ~~[illegible]~~ ~~zdawały dowodzą iż~~. przemawiają przeciwko teorji Helmholtza ~~przedmiotem~~ powstawania żył ~~Praca niniejsza jest w związku z (rozprawą~~ ... w cieczach [1], a dowodzą że zjawisko to polega na współdziałaniu lepkości i bezwładności cieczy. ~~[illegible] do~~

Treścią niniejszej rozprawy jest kilka wyników teoretycznych będących w związku z owym przedmiotem ~~Atoli Badanie teoretyczne tego przedmiotu [illegible] zaprowadziło mnie na kilka wyników~~, które ~~tak~~ jednak takie same przez się jako przyczynek do hydrodynamiki cieczy lepkich, pewien interes przedstawiają., ~~i które stanowią treść niniejszej pracy.~~ dla tego – ogłaszam

Badania Helmholtza, Kortewega, i Rayleigha wykazały że (równania określające t. zw. powolny stateczny) ruch cieczy lepkiej równaniami:

$$\mu \Delta^2 u = \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$\mu \Delta^2 v = \frac{\partial p}{\partial y}$$
$$\mu \Delta^2 w = \frac{\partial p}{\partial z}$$

nie posiadają ~~rozwiązania~~ więcej nad jedną całki, (I)

(pod zetem wyższych u v w?)

jednoznacznie określoną przez podanie wartości prędkości u v w na powierzchni obszaru badanego; znalazłszy zatem takie rozwiązanie zadość czyniące warunkom powierzchniowym (w praktyce u=v=w=0 przyjmowano), wiemy że jest to jedynem możliwem rozwiązaniem. Trzeba jednak zauważyć, że ~~dowody [illegible]~~ (popełniono [illegible]) w badaniach owych milczęco przyjęto ~~[illegible]~~ założenie skończoności obszaru, ~~[illegible]~~ na którego powierzchni dane są warunki graniczne, gdyż polegają ~~one~~ wszystkie owe dowody na zniknięciu

Przyczynek do teoryi ruchów cieczy lepkich.

I). Jednoznaczność rozwiązania

§1). Wiadomo że według (badań) Helmholtza i Korteweg'a i Rayleigh'a równania określające t. zw. (statyczny) ruch powolny cieczy lepkich, mianowicie zgodnie z warunkiem ciągłości i nie posiadają więcej nad jedną całkę, spełniającą warunek aby na powierzchni przestrzeni obszaru badanego prędkości $u\,v\,w$ określone wartości przybrały. Jeśli zatem rozwiązanie (zadość czyniące owym warunkom) znaleziono to wiemy że jest to jedynem możliwem rozwiązaniem.

związane są z milczeco przyjętem założeniem że obszar, na którego powierzchni S dane są prędkości, nie sięga do nieskończoności) gdyż polegają one na tem że całka $\int F\,dS$ (ponad ...) w skutek przyjęcia F niesk. mał., (znikającej mocy) co oczywiście nie jest usprawiedliwionem jeśli powierzchnia S jest nieskończoną całka. Zatem nie można określić ruchu podaniem prędkości istniejących w nieskończoności. Rzeczywiście poznamy też później przykład ruchu S (No) (dwuwymiarowego) --- (a podobny i Lampa) który spełnia (jest) warunek $\lim_{\infty} u = \lim_{\infty} v = 0$, podczas gdy w obszarze skończonym jedynem rozwiązaniem zgodnem z nieruchomością cieczy na ścianach naczynia zamkniętego jest zupełny stan spoczynku.

§2). Z drugiej strony zauważymy że w praktyce (eksperymentalnie) otrzymujemy (Maxwell) (przybliżenie) statyczny ruch cieczy (niezależny od czasu) w zależności od różnicy ciśnień między dwoma naczyniami rezerwoarami, między którymi istnieje pewna różnica ciśnień, że zatem nie są dane prędkości na powierzchni obszaru lecz ciśnienia, a zadość czyniącego zupełnie określonym ruch [illegible].

Chcąc jednak na tej podstawie dobrać takie zadania, które odpowiadają problematom praktyki, napotyka się na pewne trudności.

(Typowy sposób jak) (W praktyce doświadczalnej wytwarzany ruch (przybliżenie) statyczny cieczy lepkiej, że spośród jest tak dany zagadnień między dwoma warunkami, w których wytwarzamy pewną równię [illegible] rozwiązania hydrodynamicznego. Doświadczenie uczy, że wtedy przydaje [illegible] [illegible] tylko od różnicy ciśnień na powierzchni cieczy w zbiornikach wyciekających [illegible] od [illegible] i również tylko jeśli one są dostatecznie wielkie. [illegible] jest zupełnie określony)

Po pierwsze zawodzi tu to, że przedtem dowody jednoznaczności nie są ogólne bo są wykazane z milczącym przyjęciem założenia, że obszar S na którego powierzchni dane są one przedtem, nie sięga do nieskończoności. (Polegają one na tem, że całka krytyczna $\int F\, dS$ zniknąć musi wskutek znikania wielkości F w owej powierzchni, podczas gdy w razie nieskończenie wielkiej powierzchni S tego rozumowania nie można stosować, w której $\lim_{\infty} F = 0$. Istotnie poznamy też . . . . co dowodzi że owo twierdzenie w tym razie nie jest prawdziwe.)

Dalej nasuwa się następująca uwaga:

12
6.

całki $\int F \, dS$ ponad powierzchnię obszaru wskutek przyjęcia F niesk. mał.

Dowód jednoznaczności nie jest zatem ważnym dla obszaru

nieskończenie wielkiego; szczególniej w dalszym ciągu też poznamy rozmaite

przykłady ruchów cieczy (Nr 1) który tychże, z dala od wszystkich warunkom $\lim_{\infty} u\, v\, w = 0$.

i nie wystarczy także podanie ich

Po drugie zauważymy że nie są dane prędkości na

powierzchni obszaru lecz ciśnienie tam działające. Nasuwa się zatem pytanie

czy i kiedy podanie tej jednej wielkości na miejscu owych trzech może

wystarczyć do określenia ruchu.

Odpowiedź stanowi twierdzenie, które zaraz udowodnimy, że:

Przy danym rozkładzie ciśnienia w nieskończoności panującego istnieje

tylko jeden rodzaj stałego przebiegu „ruchu skończonego" w danem naczyniu.

Nazywamy tutaj ruchem „skończonym" ruch cieczy, o skończonej prędkości,

i nie posiadający żadnych takich linij prądu wydłużanie w

nieskończoności przebiegających.

Rozdzielamy sobie zatem całą ciecz zapomocą

włókien prądu i zważywszy że każde takie włókno

możemy przeciąć (zapomocą przekroju $d\omega$ w skończonej odległości)

możemy wnioskować że całkowita ilość cieczy $\Sigma V d\omega$ przez te przekroje

że (w prawdzie w praktyce ruchów ściśle statecznych niema, ale przybliżenie stateczne ~~[illegible]~~

otrzymujemy łącząc naczynie z rezerwoarami ilemożności dużemi

~~gdzie~~ w których pewne domieszanie panuje, że zatem:

Uogólnienie: albo ruch albo odwrotnie dawna podstawa stacjonarnego obrazu przestawiaj.

Nie wykluczamy jednak bynajmniej ruchów o liniach prądu sięgających aż do nieskończoności.

12

Nasuwa się zatem pytanie ~~czy~~ i kiedy podanie też jednej wielkości t.j. rozkładu ciśnienia, na miejscu owych trzech może wystarczyć do określenia tworzącego ruchu.

Oczywiście ~~nie wystarczy ono~~ (podanie samego ciśnienia jest dostatecznem określeniem ruchu) w ogólnym przypadku, wystarczy zaś [illegible] (~~[illegible]~~ ~~skończone~~) ~~poda~~ (jak łatwo poznać z później przytoczonego wzoru) ( ) podanie wszystkich natężeń p_{xx} p_{xy} ... ~~na~~ na powierzchni S ~~[illegible]~~ ((~~[illegible]~~ jeśli S skończona) Te wielkości ~~co prawda~~ ~~[illegible]~~ jednak nie są niezależne gdyż ~~[illegible]~~ spełniać muszą 3 równania typu

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = 0.$$

Wystarczy też podanie $u\,v\,w$ na niektórych częściach ~~powierzchni~~ S, a podanie natężeń na pozostających częściach, co np. znajduje zastosowanie w razie cieczy ~~[illegible]~~ zawartej ~~[illegible]~~ w naczyniu (na ścianach $u, v, w = 0$) a poruszanej za pomocą sił stycznych wywieranych na powierzchnię (~~[illegible]~~ na powierzchnię).

§3. ~~[illegible]~~ W razie ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ obszaru S nieskończonego zaś można łatwo dowieść twierdzenia, które objaśnia ~~[illegible]~~ ~~przykłady~~ ~~ruchów~~ ~~przed~~ ~~[illegible]~~ wspomniane: (krótkie określenie pewnego fizycznie istotnego) **)

Dany układ ciśnień ~~[illegible]~~ (natężeń p.xx...) działających w nieskończoności powodować może w ~~[illegible]~~ całym obszarze danym *) (tylko jeden ruch „skończony" (~~bez~~ punktów osobliwych). ~~przy danych~~ bez istotnych nieciągłości i odbytnich

„Skończonym" nazywamy tutaj taki ruch, ~~który nigdzie~~ którego prędkości $u\,v\,w$ nigdzie nie są nieskończenie wielkie

*) (Ograniczamy się dla uproszczenia do przypadku cieczy wypełniającej, $u\,v\,w = 0$ na ścianach) Tak samo też gdyby na ścianach $u\,v\,w$ były dane funkcyami.

**) jeśli nie są nieskończenie wielkie!

Przy owych warunkach przy czym jednoznaczności odpowiada jednoznaczność odwrotnego zadania matematycznego, to znaczy

~~Przy działaniu sił konserwatywnych~~ ~~Przy [illegible] prosta [illegible] ważnych, że $\frac{\partial F}{\partial q} = 0$~~

~~W ogólności są możliwe różne ruchy pod wpływem danych sił~~

~~danego układu cieczy ~~normalnych~~ ~~rotacji~~ działających na powierzchnię w nieskończoności,~~

~~nie mógł istnieć więcej niż jeden~~

~~ale tylko jeden z nich będzie ruchem „skończonym".~~

~~Ruchem~~ „Skończonym" nazywamy tutaj taki ruch (który nie tylko wszędzie nie staje się nieskończenie szybkim ale) dla którego całkowita ilość cieczy przepływającej (przez powierzchnię S) $\int$ ~~$V_n\, dS$~~, — której wszędzie bezwzględne wartości ~~gdzie~~ prędkości ~~razem ze znakiem dodatnim~~ suma bezwzględnych — pozostaje skończoną gdy S ~~będzie~~ oddali się do nieskończoności

To znaczy: $\lim_{\infty} \int (v_n)\, dS = G$ (2)

(odpowiadający właśnie przykładom na początku wspomnianym)

Pewien szczególny przypadek ruchu skończonego ~~[illegible]~~ jest ruch który nazwać by można:

kanałowym, mianowicie jeżeli ~~wszystkie~~ (linie prądu mogą wprawdzie sięgać do ∞ ale) żadna linija prądu nie przepływa ~~przez~~ każde całkowicie w nieskończonej odległości. W takim razie bowiem (włókno prądu

~~wybrać można~~ ~~[illegible]~~ taki ~~przekrój o skończonej całkowitej przez który każde włókno musi [illegible] przejść.~~

w tym obrębie, gdzie ~~[illegible]~~ znajduje się w skończonej odległości, może zostać przecięte przekrojem q, tak że Σq będzie skończona; ~~a to skutek~~ dla tego też jeżeli prędkość wszędzie skończona, ilość przepływająca przez te przekroje $\Sigma (v_n)$ ~~dq~~ $= \oint F$ będzie skończona, i z powodu stałości iloczynu v_{nq} ~~$v_n\, d\omega$~~ (wzdłuż włókna prądu): $\lim_{\infty} \int (v_n)\, dS \leqq 2 \oint F$

W razie jeżeli nie ma linij prądu zamkniętych, lecz wszystkie sięgają z ∞ do ∞, będzie ważny znak równości. Przykład równanie (18).

~~Zważywszy, że~~ Ponieważ, ~~$dS = r^2\, d\omega$~~ kąt stożkowy $d\omega$ wycina (element) powierzchni $dS = \frac{r^2\, d\omega}{\cos n r}$

wynika, że w ogólności prędkość v_n musi znikać w nieskończoności przynajmniej jak $\frac{1}{r^2}$

dla ~~dwuwymiarowego~~ (skończonego) dla ruchu trzywymiarowego jak $\frac{1}{r}$; [~~wyjątek mogą~~ stanowić pewne punkty osobliwe,

jeżeli jednak dodatkowo przyjmujemy że ~~razem~~ w nieskończoności ~~będzie powierzchnię~~ nie

Czy jeżeli $u_\infty = v_\infty = 0$ $\quad p_\infty = 0$

nie musi samo przez się być $\Sigma V\omega$ = finito? albo nawet = 0?

$$\overset{\|}{\psi}$$

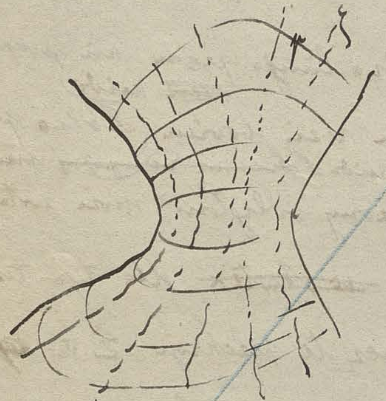
$\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta)$

$\lim \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0$

$\lim \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 0$

Albo czy jeżeli ψ finito, nie wynika samo przez się że $\lim u_\infty = v_\infty = 0$? dla $\lim p = \infty$

$\Delta^2 p = 0 \;\}\; \lim p_\infty = 0$



$\Delta^2(\Delta^2\psi) = 0$

zatem $\Delta^2\psi$ albo sięga do ∞, albo kończy się na ściankach

ponieważ $\lim \frac{\partial u}{\partial x} \ldots = 0$

zatem też $\lim_\infty \zeta = 0$ nie sięga do ∞

więc $\zeta = \Delta^2\psi$ porządnie kończy się tylko na ściankach

ψ = Kraftfluss, Kraftlinien Anzahl (El. U)

In case when $\lim (u\, v\, w) = 0$ we have $\iiint \Phi\, dv = \iiint (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dx\, dy\, dz$!

$$\iiint \Phi\, dv = \iint (\Delta^2\psi)^2\, dx\, dy$$

działają naprężenia styczne tylko ~~normalne~~ ciśnienie (hydrostatyczne), to wynika że

prędkość wszędzie w nieskończoności musi być nieskończenie mała, bo z powodu skończoności wielkości

(musiałyby być ograniczone w każdym razie do)
G skończone wartości prędkości ~~[illegible] tylko~~ (skończonej części obszaru S,

a w ~~takim~~ razie ~~[illegible]~~ musiałyby istnieć pochodne
a ~~[illegible] zniknięcie naprężeń stycznych wymaga~~ skończone dla
co się sprzeciwia warunkowi $p_\infty = 0$]
v nieskończoności
ogólnie znikające pochodnych prędkości ~~wymagane przez warunek co do ciśnienia~~

~~wymaga~~ aby wogóle znikające prędkości.

ani „powolny" ani „szybki"
Pod temi założeniami ~~wogóle żaden ruch nie jest możliwym [illegible] wszędzie [illegible]~~ ~~[illegible] być w spoczynku.~~

$\lim_\infty p = 0$. ~~wynika zatem ogólnie [illegible]~~

Albowiem z
Zasady ~~zachowania~~ energii wynika że praca wykonana przez ciśnienie

na powierzchnię i ~~pracę siły~~ ~~[illegible]~~ musi ~~być~~ się równać

przyrostowi energii kinetycznej cieczy opuszczającej ów obszar i ~~[illegible]~~ ilości

ciepła rozproszonej: (3)

$$\iint [p_{xx} l + p_{xy} m + p_{xz} n) u + (p_{xy} l + p_{yy} m + p_{yz} n) v + (\quad) w] dS +$$

$$~~\iiint (Xu + Yv + Zw)\, dx\,dy\,dz~~ = \iint (ul + vm + wn)\rho \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\, dS + \iiint \Phi\, dx\,dy\,dz$$

co łatwo także sprawdzić przez podstawienie wartości p_{xx} itd. i całkowanie

dla $\lim S = \infty$:
W równaniu tym pod powyższemi założeniami znikają ~~[illegible]~~ całki

częściowe. [illegible] wskutek skończoności G, a zniknięcia naprężeń i prędkości

powierzchowne wskutek skończoności G, a zniknięcia naprężeń i prędkości,

~~całka objętościowa z lewej strony wskutek $\iiint \frac{\partial U}{\partial x} u$ zamienia się w~~

~~$\iint U(ul + vm + wn)\, dS + \iiint U \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$~~ co pociąga za sobą (4)

funkcja dyss. może mieć tylko wartości dodatnie.

$u = v = w =$ const. wskutek tego że ($\Phi = \ldots$

a zatem z powodu ~~zniknięcia prędkości~~ $\lim_\infty v = 0$ będzie ogólnie $u = v = w = 0$.

Przyjmując że $u\ v\ w$ są wszędzie ciągłemi funkcyami, ~~aż do ∞~~ także w ∞, eo ipso już wynika że dla $\lim_{\infty} u\ v\ w = 0$ także musi być $\lim\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \ldots\right) = 0$ zatem $p_{xx} = p$ etc.

p musi być skończonem

~~Wyjątek ten tłumaczenie ze względu wrażenia co do zachowania energii.~~

§4) Udowodnić łatwo [przedwszystkiem] że w razie jeśli owe [dążące do zera] w nieskończoności, to żaden ruch skończony nie może powstać. Wynika to ze względu rozważania co do zachowania energii które nie ograniczają się do obszaru (do ruchów powolnych – ~~...~~) możemy wyrazić w formie:

$$\iint \left[(p_{xx} l + p_{xy} m + p_{xz} n) u + (p_{xy} l + p_{yy} m + p_{yz} n) v + (\qquad) w\right] dS =$$

$$= \iint (ul + vm + wn)\, \rho \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\, dS + \iiint \Phi \, dx\, dy\, dz$$

który wynika z podstawienia p_{xx} itd. i całkowania częściowego [przy użyciu równań]. ~~(do ...~~

Całki powierzchniowe ~~odnoszą się~~ [obejmują] do zewnętrznej powierzchni obszaru S) [?] ograniczającej ruch cieczy i [wszystkie] (do wszystkich powierzchni gdzie p_{xx} .. lub $u\, v\, w$ doznają nieciągłości.

Takich powierzchni jednak we wnętrzu cieczy lepkiej być nie może z oczywistych powodów mechanicznych, jedynie w pewnych punktach lub liniach [na brzegu obszaru] ~~mogą powstać~~ nieskończoności. [a także pochodne $\frac{\partial u}{\partial x}$ itd. mogą się stać nawet] tego rodzaju nieciągłości n.p. na krawędziach matematycznie ostrych. ~~(takich punktów lub linii ...~~ [są dopuszczalne] ~~... i specjalnych ... czy praca wykonana na powierzchni już otaczającej ... przy zmniejszaniu się nieskończenie skurczeniu tej powierzchni~~

~~W takich punktach lub liniach~~ Wtedy musi (być) jednak [oczywiście] spełniony warunek że wartość pracy wykonanej przez naprężenia na powierzchnię otaczającą owe punkty lub linie zdąża do wartości zero, gdy ta powierzchnia ~~...~~ się skurcza do zero, gdyż krawędź czy ściana nieruchoma nie może wykonać żadnej pracy.

Tylko takie między możliwemi rozwiązaniami równań hydrodyn. mogą mieć [bezpośrednie] znaczenie fizyczne. [i to rozumiemy pod ograniczeniem – do ruchów bez „istotnych nieciągłości"] Otóż całki powierzchniowe odnoszące się do ścian naczynia oczywiście nie przyczyniają się do wartości pracy z powodu przylegania cieczy [$u=v=w=0$]. Pozostają składniki

*) Rayleigh

To samo dla wszystkich

Wypływa to z równania ogólniejszego równoważności przy [wykonanej] przesunięciu na powierzchni [cieczy dowolnej] ~~ogranicz~~ z (przyrostem energii kinetycznej [energię wspólnej przestrzeni i z]), które:

~~Wynika zatem że~~

Z tego wypływa wniosek, że w ogólności także pochodne $\frac{\partial u}{\partial -}$ będą tam nieskończenie małe, co zresztą także wynika ze skończoności $\iiint \Phi \, d\omega$

Rozważmy jeszcze zachowanie się cieczy w ∞.

Wskutek tego w ogólności

$\lim p_{xy} = \ldots = 0$

$\lim p_{xx} = p_0 - \ldots = p$

Zatem wystarczy do [określenia] ruchu [w ogólności] podanie jednej wielkości, tj. wartości ciśnienia hydrostatycznego p w ∞, bo wszystkie w początku pomocne się ~~[illegible]~~ [objaśniają].

W dalszym ciągu ograniczamy się do ruchów „powolnych” (ponieważ dla takich ~~dla których obliczenia~~ określonych systemu (1)) ważnem jest prawo superpozycji. ~~zasadniczo systemu~~

~~Przypuśćmy że~~ (Gdyby) przy danem rozkładzie (ciśnień przy…) ~~ciśnienia~~ w „∞” panującego dwa różne ruchy „u”, „u′” ~~były~~ możliwe, wtedy różnica u-u′, v-v′, w-w′ musiałaby stanowić ruch ~~właśnie co omawiany~~, wytworzony przez znikającego małe ciśnienia, a zatem jak właśnie pokazaliśmy (wogóle) znikający.

Zatem twierdzenie o jednoznaczności ruchów „skończonych” ( ) (przy) ~~obliczenia~~ podanemu rozkładu ciśnień w nieskończoności dostatecznie jest udowodnionem.

~~Ponieważ co~~ abstrakcja ruchu sięgającego do nieskończoności (w ogólności) ~~ogólnie~~ tylko wtedy ma praktyczne znaczenie fizyczne jeśli ruch ten pozostaje (przytem skończonej ilości energii, ~~ogólnie~~) skończonym, ~~przy~~ + praktyczna doniosłość tego twierdzenia wynika z tego że

Są wyjątki / kule w nieskończoności

Pytanie, czy jednak dla dowolnego rozkładu ciśnienia w ~~∞~~ (nieskończoności) w pewnem zakresie zawsze ~~może zaledwie~~ istnieje ~~ruch~~ ruch statyczny, a wszczególności statyczny „skończony”, nie jest oczywiście załatwione * i nie będziemy tego tutaj bliżej ~~właściwie~~ rozstrzygać, tylko ograniczymy się do podania kilku przykładów.

albo czy oprócz skończonych przy danem p∞ istnieją także nieskończone?

Ograniczymy się w tym rozdziale do „powolnych" ~~[illegible]~~ ruchów dwuwymiarowych.

Rayleigh podał przykłady takich ruchów, powstających ~~w skutek danego~~ we wnętrzu koła wskutek pewnego rozmieszczenia źródeł i wypływów na jego obwodzie. ~~Za podstawę~~ Punkt wyjścia stanowiła analogia tego zadania z drganiami płyty kołowej sprężystej, powodowana wspólnością równania

(5) $\Delta^2 \Delta^2 \psi = 0$ w obu przypadkach, które także tutaj uważamy jako podstawę. ~~(w którym ψ oznacza funkcję prędu)~~

gdzie $\left(\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$

~~Uważamy tego samego równania jako podstawę~~. Dochodzimy do tego równania wskutek definicji „funkcji prędu" ψ: $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, ~~[illegible]~~ i przez (6)

różniczkowanie równania Ia według y, Ib według x. ~~Równania~~

~~Te same równania przy wprowadzeniu prędk~~ Dla prędkości wirowania $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

~~przyjmują kształt $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}(\mu\zeta)$, $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu\zeta)$~~ otrzymujemy $\zeta = \Delta^2 \psi$ (7)

a równania I przy ~~użyciu tej~~ wprowadzeniu tej wielkości przyjmują kształt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (8)$$

wskazujące, że p i ζ są funkcjami sprzężonemi.

~~Z [illegible] Z własności operatora Δ^2 dowodzę że [illegible] jako~~ Zatem otrzymamy ogólne rozwiązanie stawiając $p + i\zeta = f(x+iy)$.

Najdogodniejszy sposób jest jednak wprowadzenie nowych zmiennych niezależnych $\alpha = x+iy$, $\beta = x-iy$, i wskutek tego symbolów

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}\ ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta}\right); \quad \Delta^2 = 4\frac{\partial^2}{\partial \alpha\, \partial \beta} \quad i \qquad (9)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$$

zatem p lub ξ = potencyałem $\quad \xi = p = \int \frac{1}{r}\, dx\, dy \quad$ mas leżących poza obszarem w którym się odbywa, a zatem w ściankach

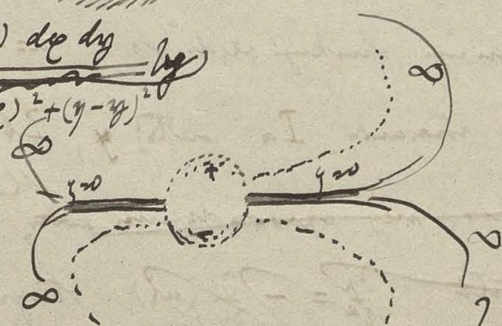
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \xi \qquad \text{więc} \qquad \psi = \int \xi \frac{dx\, dy}{r} \lg r = \int \frac{dx\, dy}{r} \int \frac{dx\, dy}{r} \lg r$$

$$\psi = \int \frac{d\xi\, d\eta}{\lg \rho\; r_{\xi - \xi,\ \eta - \eta}} \int \frac{d\varphi\, d\chi}{\lg\; r_{\xi - \varphi,\ \eta - \chi}}$$

nieprawdziwie Oberflächenwerthe! zatem można całkę odnieść do powierzchni ściany.

$$\psi = \int_{<S}^{<S} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \int_{>S}^{>S} \frac{f(\varphi, \chi)\, d\varphi\, d\chi}{\sqrt{(\xi-\varphi)^2 + (\eta-\chi)^2}} \lg$$

Dlaczego: ξ musi być $= 0$ na ... i w ∞



~~$f(\varphi, \chi) = \sum \ldots (a_0 + a_1 r + b_1 r^2 + \ldots) \sin n\theta$~~

~~$d\varphi\, d\chi = r\, dr\, d\theta$~~

~~$\int r^n\, dr \lg r$~~

$$\alpha\beta = r^2$$

$$\beta\, d\alpha + \alpha\, d\beta = 2r\, dr$$

$$\lg \alpha = \lg r + i\varphi$$

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{dr}{r} + i\, d\varphi$$

~~$d\alpha = dr(\cos\varphi + i \sin\varphi) - r(\sin\varphi - i\cos\varphi)\, d\varphi$~~

$$r\, dr\, d\varphi = \frac{\beta\, d\alpha + \alpha\, d\beta}{2i}\left(\frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{\beta\, d\alpha + \alpha\, d\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}\right) = \frac{(\beta\, d\alpha)^2 - (\alpha\, d\beta)^2}{4i\alpha\beta}$$

$$= \frac{dr}{r}\frac{\alpha}{r} + i\frac{\alpha}{r}\, d\varphi \qquad \alpha = r e^{i\theta} \qquad \beta = r e^{-i\theta}$$

$$r^2 = \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\theta = \frac{\lg\alpha - \lg\beta}{2i}$$

$$dr\, d\theta = d\alpha\, d\beta \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \alpha} & \frac{\partial r}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \end{vmatrix}$$

$$= d\alpha\, d\beta \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \\ \frac{1}{2i\alpha} & -\frac{1}{2i\beta} \end{vmatrix} = d\alpha\, d\beta \left(-\frac{1}{4i\sqrt{\alpha\beta}} - \frac{1}{4i\sqrt{\alpha\beta}}\right) = -\frac{1}{2i\sqrt{\alpha\beta}}\, d\alpha\, d\beta$$

$$r\, dr\, d\theta = -\frac{d\alpha\, d\beta}{2i}$$

pochodzące od części powierzchni S położonych wewnątrz cieczy. Wartości ich jest oczywiście mniejsze od iloczynu wielkości G (określonej w) w największej wartości naprężeń prz. itd. istniejące panujące na S. Te jednak dążą do zera gdy S oddalamy do nieskończoności, wskutek czego znika całka powierzchniowa z lewej strony równania, a podobnie ~~wskutek~~ z powodu skończoności mocy całka z prawej strony. (??) Zatem funkcja dyssypacyjna Φ będzie zero, z czego z powodu ~~...~~ skończoności ... wynika wszędzie $u=v=w=0$. określonych równań ( )

Dla ruchów powolnych do których znów się graniczymy w dalszym ciągu prawo superpozycji jest ważnem. Gdyby zatem przy danym rozkładzie naprężeń prz... (o skończonej wielkości) dwa różne skończone ruchy ($u\,v\,w$, $u'v'w'$ były możliwe, to wtedy różnice $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$ musiałyby stanowić ruch wytworzony przez żadnego małe ciśnienia, a zatem jak właśnie pokazaliśmy, w ogóle znikający.

Zatem twierdzenie o jednoznaczności ruchów skończonych ( ) przez podanie rozkładu ciśnień w nieskończ. dostatecznych jest udowodnione.

W praktyce oczywiście tylko mamy do czynienia z ruchami ~~przeważnie tylko~~ skończonemi (razy kanałowej), a nieskończony „nieskończenie” duże ~~o danem ciśnieniu~~ reprezentują owe części przestrzeni w których dany jest rozkład ciśnień, czem przykład poruszony w §2 się objaśnia.

(odnoszący się w praktyce do ciśnienia normalnego p, podczas gdy ciśnienie ~~styczne~~ styczne $=0$)

$\frac{\partial u}{\partial x}$ .. $=0$

(??) Nie wiemy czy wszędzie musi być $\lim_{\infty} uvw = 0$ jeśli ciśnienia p_{∞} dopuszczamy.

~~Powstanie~~ ~~Istnienie~~ Powstanie [illegible] kan[illegible] ~~[illegible]~~ ... wskutek (stoiczonych) [illegible] w ∞ [illegible]) wymaga w ogólności, ażeby naczynie w którem ruch się odbywa, posiadało przekrój w niektórem miejscu nieskończenie wielki.

~~Od przekroju [illegible] [illegible] [illegible] pojedynczego [illegible] przez [illegible]~~
~~[illegible] powierzchnia kuli (o promieniu R) który [illegible]~~

Ażeby (pojęcie przekroju ~~[illegible]~~ ściślej określić) wyobraźmy sobie z początku współrzędnych kulę o promieniu R i pod „przekrojem" jów [illegible] [illegible] powierzchnię (rozumieć będziemy który ~~[illegible]~~ ciecz naczynia z niej ~~[illegible]~~ wycina się.

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~Ruch [illegible] cieczy [illegible], przylegającej do ścian naczynia [illegible] [illegible] istnieć, jeśli energia [illegible] $\iiint \Phi\, d\omega$ nie jest zero.~~

~~[illegible]~~ (Otóż wyobraźmy sobie że) ~~[illegible]~~ przekrój ~~[illegible]~~ $\lim_{\infty} S$ jest ~~[illegible]~~ skończonym. W takim razie mamy dwie możliwości do rozważenia. Albo prędkości w nieskończoności są nieskończenie małe, wtedy praca całkowita wykonana przez ciśnienie jest nieskończenie mała, więc według ( ) Φ musi zniknąć ~~i [illegible]~~

~~Albo prędkości w nieskończ. są skończone~~ (nawet) ~~wtedy (także tam [illegible] [illegible] Φ [illegible] (wskutek [illegible]) istnieją [illegible] pochodne $\frac{\partial u}{\partial x}$ [illegible])~~ ~~[illegible] nie jest zerem.~~

~~Wtedy też $\iiint \Phi\, d\omega$ musi być nieskończenie [illegible] co się sprzeciwia skończoności pracy~~

~~I się sprzeciwia jednak~~ ~~[illegible]~~ Nie zgadza się z tem jednak, że w ~~[illegible]~~ tym razie ~~[illegible]~~ Φ wskutek skończoności pochodnych $\frac{\partial u}{\partial x}$ ... wszędzie od zero się różni, zatem $\iiint \Phi\, d\omega$ musi być nieskończenie wielkie. Wynika więc konieczność przekroju $\lim_{\infty} S$ nieskończonego (z pominięciem możności punktów osobliwych).

W takim razie „skończoność" ruchu wymaga, ażeby prędkość w nieskończ. była nieskończ. małą jak $\lim \frac{1}{R^2}$ w przypadku trójwymiarowym, a jak $\lim \frac{1}{R}$ w dwuwymiarowym

(z wyłączeniem wszystkich jeszcze punktów osobliwych)

Powolne ruchy dwuwymiarowe.

§5). ~~Ogólny~~ Do ~~Badań~~ Ruchów dwuwymiarowych powolnych bez sił zewnętrznych ~~zostały~~ ~~przez~~ bad. ~~poświęcone~~ odnoszą się badania Stokesa ~~(...)~~ (wahania poprzeczne walca), Margulesa, Ritza, (obrót zmienny między współosiowemi walcami), Lamba i Rayleigha (ruchy statyczne).

~~Wzory podane przez Stokesa i Lamba dla ruchów zmiennych nie są jednak całkami najogólniejszemi~~

~~Podamy~~ Wyprowadzimy najprzód w krótkości rozwiązanie odnoszące się do stanu zmiennego z czasem powoli.

Używając skrócenia $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ równania ruchu ~~...~~ piszemy w formie

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \nabla^2 u - \rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \nabla^2 v - \rho \frac{\partial v}{\partial t}$$

które przez wprowadzenie funkcyi prądu ψ za pomocą relacyi: $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

zamieniają się w

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial Z}{\partial y} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial x} \qquad \text{czyli } \nabla p = 0 \qquad \nabla Z = 0$$

gdzie użyliśmy skrócenia $Z = -\rho\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu \nabla^2 \psi$

~~Równania~~ Z równań wynika że $p + iZ$ musi być funkcyą $x+iy$ której spółczynniki mogą oczywiście być funkcyami czasu, co oznaczamy

$$p + iZ = f(x+iy, t) = \varphi(x,y,t) + i\chi(x,y,t)$$

Wynika więc $p = \varphi(x,y,t)$ a funkcya ψ określa się z równania

$$\chi = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu \nabla^2 \psi$$

Można ψ rozdzielić $\psi = \psi_1 + \psi_2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

Dzięki temu (5) przyjmuje kształt: $\frac{\partial^4\psi}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}=0$ (10)

i otrzymujemy rozwiązanie: $\psi = \alpha f_1(\beta) + \beta f_2(\alpha) + f_3(\alpha) + f_4(\beta)$ (11)

ponieważ zaś ~~[illegible]~~ ζ ~~[illegible]~~ wynikające z $\zeta = 4\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta} = 4[f_1'(\beta)+f_2'(\alpha)]$ (12)

(musi być rzeczywiste ~~tak samo jak i równanie ψ~~, przeto ~~[illegible]~~ jako też równanie ψ)

Jeśli odtąd znak f z kreską wyłącznie używać do oznaczenia funkcji rzeczywistych, ~~musi być albo czysto rzeczywistą albo urojoną~~ ~~musi się przedstawić albo w formie~~ musimy mieć $\zeta = 4[f'(\alpha) + f'(\beta)]$, albo $\zeta = 4\frac{f'(\alpha) - f'(\beta)}{i}$ (13)

$\psi = 4[f(\alpha) - f(\beta)]$?

albo także sumę dwóch takich wyrażeń. To samo stosuje się do składników $f_3(\alpha) + f_4(\beta)$, które oczywiście przedstawiają superpozycję ~~dodatkową~~ zwykłego ruchu potencjalnego.

~~Użyjemy~~ Użyjemy tej metody do skonstruowania ~~prawego~~ ruchu najprostszego należącego do typu „kanałowego", t.j. przepływu przez otwór w ściance X.

~~[illegible]~~ Przyjmiemy formę (13 b) z odpowiednim ruchem potencjalnym t.j.

(14) $\psi = \frac{1}{i}[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) + g(\alpha) - g(\beta)]$ z czego wypływają odtąd prędkości:

(15) $v = \frac{1}{i}[\alpha f'(\beta) - \beta f'(\alpha) + f(\beta) - f(\alpha) + g'(\alpha) - g'(\beta)]$

$u = [+\alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) \mp f(\beta) \mp f(\alpha) \mp g'(\alpha) \mp g'(\beta)]$

Jeśli f jest funkcją jednowartościową, łatwo znaleźć warunek ~~[illegible]~~ pod którym otrzymamy $u = v = 0$ przy ściance $y=0$: ~~Dla tego tożsamościowo dla $\alpha\beta$ musi być~~ Podstawiając mianowicie te warunki dla argumentów $\alpha = +\beta$ (co oznacza $y=0$) ~~sprowadza się~~ ~~[illegible]~~ dojdziemy do relacji:

więc

$$\psi = \int d\xi\, d\eta \,\log \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} \int f(s) \log \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2}\, ds$$

?

$g'(\alpha) = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$, w skutek czego owe równania (15) zamieniają się w

$$u = (\alpha-\beta)\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right]$$

$$v = \frac{1}{i}\left[2\left(f(\beta) - f(\alpha)\right) + (\alpha-\beta)\left(f'(\alpha)+f'(\beta)\right)\right] \qquad (16)$$

Biorąc n.p. jakąkolwiek funkcyę $f = \alpha^n$ otrzymujemy ruchy wody z warunkiem spoczynku przy ścianie $y=0$, ale takie ruchy jako „nieskończone" nie wiele przedstawiają interesu.

Obierzmy jednak: $f = \sqrt{\alpha^2 - c^2} = \sqrt{(\alpha+c)(\alpha-c)} =$

$$= \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \;;\; f' = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} \qquad (17)$$

gdzie $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$ mają oznaczać promienie wodzące od punktu α do punktów $+c, -c$ wykreślone i kąty między niemi a osią X zawarte.

Wprawdzie nie jest to wcale funkcya jednowartościowa, ale obliczywszy prędkości według (16) [*]:

$$u = -4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \qquad (18)$$

$$v = 4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\theta \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{4c^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

przekonywujemy się, że one istotnie znikają dla ściany $y=0$ sięgającej od $x=c$ do $x=+\infty$; i od $x=-c$ do $x=-\infty$; a przyjmując tę ścianę za nieprzekraczalną przegrodę, robimy funkcyę $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ jednowartościową jak wskazuje fig.

$\frac{\pi}{0}$ ⋯ ⋮ ⋯ $\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = 0$ / $\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \pi$

---

[*] Przy tem użyto transformacyi: $\sqrt{\alpha^2-c^2} - \sqrt{\beta^2-c^2} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2-c^2}} + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} =$

$$= (\alpha+\beta)\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-c^2}}\right] + c^2\left[\frac{1}{\sqrt{\beta^2-c^2}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-c^2}}\right]$$

$$u = -4y\, n\, r^{n-1} \sin(n-1)\varphi \qquad = -n r^n \sin\varphi \sin(n-1)\varphi$$

$$v = -2 r^n \sin n\varphi + y\, n\, r^{n-1} \cos(n-1)\varphi = r^n \{ n \sin\varphi \cos(n-1)\varphi - 2 \sin n\varphi \}$$

Między punktami $+c, -c$ dla prędkości wskutek $\theta = \theta_2 = 0$, $\theta_1 = \pi$ otrzymujemy $v = \pm\sqrt{c^2 - x^2}$. Punkty $\pm c$ są także

i ψ_1 określić tak aiby był:

$$\chi = \mu \nabla^2 \psi_1$$

wtedy $\nabla^2 \psi_2 - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = 0$

Funkcya ψ złożona z dwóch części ψ_1 i ψ_2 zadość uczyniających równaniu ( ) i ( ) stanowi ~~Równanie~~ ~~stanowi~~ najogólniejsze rozwiązanie naszego zadania.

§6).

Podamy szczególne przykłady tylko w razie ~~[illegible]~~ ruchu stałecznego, dla którego się upraszcza równanie

$$\Delta^2 \psi = \xi$$

gdzie ξ jest prędkością wirowania $\left(= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ ~~zadość czyniącą~~ spełniającą równanie $\nabla^2 \xi = 0$ a zatem też $\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0$ Przykłady

Wynika zatem stąd że linie równego ciśnienia i wirowania tworzą system ortogonalny: $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}$ $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$

$$p + i\xi = f(x + iy)$$

Rozwiązania ~~podstawiając~~ przyjmuje jednak formę najdogodniejszą przy użyciu zmiennych niezależnych $\alpha = x + iy$; $\beta = x - iy$, i wskutek tego symbolów:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \; ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta}\right) \; ; \quad \Delta^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}$$

Dzięki temu podstawieniu (5) przyjmuje kształt: $\frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} = 0$

i otrzymujemy rozwiązanie: $\psi = \alpha f_1(\beta) + \beta f_2(\alpha) + f_3(\alpha) + f_4(\beta)$

ponieważ zaś $\xi = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} = 4(f_1'(\beta) + f_2'(\alpha))$. ~~[illegible]~~ musi być rzeczywiste

więc (jeśli znakiem f odtąd oznaczamy funkcyę rzeczywistą) musimy mieć ~~[illegible]~~ jedno z dwóch rozwiązań typu:

W ogólności wystarczy zatem dla określenia ruchów stacyonarnych jednoznacznie podanie jednej wielkości, t. j. rozkładu ciśnienia hidrostatycznego p, które działa ~~działającego~~ w nieskończonej odległości, co objaśnia kwestyę na początku poruszaną.

Ruchy dwuwymiarowe.

§6). Zdaje się, że „transpiracya" cieczy między płaszczyznami równoległymi, (ruch cieczy wirujący) między walcami współosiowymi i pewne ruchy wewnątrz koła, badane przez Rayleigha metodą źródeł i wypływów*) są jedyne dotychczas bliżej poznane przykłady dwuwymiarowych ruchów stacyonarnych cieczy lepkiej. Wobec tego podane poniżej przykłady innych takich ruchów na uwagę zasługują, zwłaszcza ponieważ są to najprostsze (~~jako~~ przedstawiciele ruchów sięgających do nieskończoności.

Podamy przedewszystkiem pewną formę ogólnego rozwiązania równań w razie ruchu dwuwymiarowego. ~~[W skutek wprowadzenia funkcyi prądu ψ zapomocą relacyi: $u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$ przesto]~~ Równania dynamiczne (   ) wskutek nieściśliwości cieczy można napisać w formie

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}; \quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \qquad (4)$$

~~Ciśnienie~~ Relacya (13) daje nam wartość ukrywania:

$$\xi = \frac{8r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \qquad = \frac{4}{i}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-c^2}}\right] \tag{19}$$

a z tego otrzymujemy ciśnienie jako funkcyę sprzężoną:

$$p = \frac{8r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \tag{20}$$

~~Punkty +c, -c dla tych funkcyj są osobliwe~~; w nieskończoności znika ξ,

poniewaź ~~ostatek~~ $\lim\limits_{r=\infty} \left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) = 0$, powyżej ~~.....~~ ściany, poniżej ściany zaś

~~otrzymuje wartość~~

$\lim\limits_{r=\infty} \left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) = \pi$. Z tej samej przyczyny $\lim\limits_{r=\infty} p = \pm 2$

~~.....~~ zależnie czy punkt znajduje się powyżej czy poniżej ściany. ~~.....~~

~~Stanowi to zatem~~ Różnica ciśnienia po obu stronach przegrody, ~~.....~~ powodująca ruch, wynosi zatem 4 jednostek, ~~....~~ dla innej wartości tej różnicy należałoby tylko wszystkie prędkości w odpowiednim stosunku zmienić.

Ilość cieczy przepływającą przez otwór wynosi:

Ponieważ dla prędkości między punktami $\pm c$ wskutek $\varphi = \theta_2 = 0$; $\theta_1 = \pi$ otrzymujemy $v = 4\sqrt{c^2-x^2}$ przeto

$F = 8\int_0^c \sqrt{c^2-x^2}\,dx = 2c\pi$ albo w zależności od czynnej różnicy ciśnienia Δp:

$$F = \frac{\Delta p \cdot c\pi}{2}$$

Pozostaje do rozwiązania rozkład prędkości w nieskończoności i w otoczeniu punktów osobliwych $\pm c$:

Dla punktów w oddaleniu z ~~..~~ można stawić: $\lim \left[\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right] = -\frac{c^2}{2} \lim \left[\frac{\frac{\theta_1-\theta}{c} - \frac{\theta-\theta_2}{c}}{c}\right]$

$$= -\frac{c^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

$x = \cos\varphi$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_0^1 \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$\Delta x = 4$

A). $\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha)$

$\xi = 4\left[f'(\beta) + f'(\alpha)\right]$

$p = 4\mu \frac{\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right]}{i}$

B). $\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)\right]$

$\xi = \frac{4}{i}\left[f'(\beta) - f'(\alpha)\right]$

$p = \frac{4}{\mu}\left[f'(\alpha) + f'(\beta)\right]$

albo też sumę dwóch takich funkcyj, a ponadto superponuje się jeszcze wskutek składników f_3, f_4, (zwykły) ruch potencyalny wyrażony przez

C). $\psi = g(\alpha) + g(\beta)$ lub D). $\psi = \frac{1}{i}\left[g(\alpha) - g(\beta)\right]$

~~Stosując do współrzędnych~~ Jako ścianę naczynia ~~uważać można~~ może być wziętą owe powierzchnie gdzie prędkość $u = v = 0$, a równanie ich ~~wyraża~~ wyraża się w formie

$$u^2 + v^2 = 4 \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 0.$$

§7). Zadanie żeby (znaleźć ruch przy danym kształcie ściany) odpowiedni, nie jest jednak rozwiązane i nawet nie ~~ścisły~~ znany kryteryum pod jakiemi warunkami ruch stacyjny jest możliwy przy danym kształcie ścian wogóle.

A już Stokes podał przykład ~~zadania~~ niedopuszczający rozwiązania ~~stacyjnego~~: ~~ruch cieczy około walca nieskończonego trzymanego prostopadle do kierunku prędkości~~ jeżeli sobie w przód jednostajny o prędkości c ~~w kier.~~ wyobrażamy walec nieskończony trzymany prostopadle. Podczas gdy dla kuli ~~Łatwo~~ i ~~naszą metodą możemy udowodnić że~~ w analogicznym przypadku istnieje znane rozwiązanie, to tutaj jedyne możliwe rozwiązanie jest $u = v = 0$, więc walec

~~a zauważymy że~~ (: sin θ = y/r otrzymujemy przez różniczkowanie dalej)

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} \qquad (21)\ 21$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{2xy}{r^4} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$ a zatem, zauważymy że jest ~~to~~ bardzo

małą wielkością:

Rayleigh

$$\lim u = +4\frac{c^2\sin^2\theta\cos\theta}{r}$$

$$\lim v = -4\frac{c^2\sin\theta\cos^2\theta}{r} + \frac{4c^2\sin\theta}{r} = \frac{4c^2}{r}\sin^3\theta \qquad (22)$$

~~Zatem prędkości znikają w nieskończoności. Kierunek ruchu w większej odległości od otworu jest dany~~ W większej odległości od otworu ciecz płynie zatem w kierunku promieni, z prędkością $V = \frac{4c^2\sin^2\theta}{r}$, znikającą w nieskończoności. Równania (22) ~~przedstawiają~~ można ~~zatem~~ też uważać za określenie wypływu z ~~nieskoń~~ bardzo małego źródła 2c w ścianie y=0. Otrzymuje się to samo rozwiązanie bezpośrednio z równań (16) podstawiając: $f = \frac{c^2}{2}\frac{1}{\alpha}$; ale ten sposób nie objaśnia zachowania się cieczy w bliskości punktu osobliwego r=0. ~~przestały wypływać~~ (23)

Wynika (stąd równocześnie) ~~z tego~~:

$$\xi = -\frac{2c^2}{r^2}\sin 2\theta \qquad \psi = c^2(2\theta - \sin 2\theta) \qquad (24)$$

$$p = -\frac{2c^2}{r^2}\cos 2\theta$$

co również z równań (19) (20) wypływa, za pomocą rozwinięcia $\lim \log\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2}$

$$= -\frac{c^2}{2}\frac{1-2\cos^2\theta}{r^2}$$

Przyjmując pewien rozkład źródeł i wypływów na ścianie y=0 otrzymalibyśmy wypadkowy ruch przez sumację czyli też całkowanie wyrażeń w rodzaju (22) zgodny z warunkiem spoczynku przy innych częściach ścianki za pomocą odpowiedniej stałej.

Równanie to jest identyczne z przypadkiem [rozwiązaniem] otrzymanem przez Rayleigha dla cylindra na obwodzie koła, jeżeli się ograniczamy do ~~pobliża~~ bezpośredniego (wielce bliskiego) otoczenia tego cylindra (wzór 22' Rayleigha

zgodny z warunkiem $\lim u = c$, $\lim v = 0$ (10

22

Łatwo też naszą metodą udowodnimy że ~~niemożliwy~~ ruch „~~skończony~~ [illegible]" jest niemożliwy.

Zauważymy najpierw [illegible] co do funkcyi φ, ψ, że dla ruchów skończonych nie mogą one posiadać punktów osobliwych w obszarze cieczą wypełnionym (3)

~~bo w takim wypadku~~ w ogólności ~~musiałyby być nieskończone~~ ~~inaczej by prędkości u, v nie były wszędzie skończone~~. ~~Więc w ogóle będzie można stosować~~ ~~Więc w ogóle~~ obrać tylko do ruchów skończonych takie funkcye φ, które posiadają punkty osobliwe w obszarze reprezentowanym przez ścianę naczynia. (~~lub ewentualnie na jego brzegu~~) (Ale to nie jest ruch skończony!)

Jeżeli ściana ~~jest reprezentowana przez koło~~ ma kształt walca, czyli jeżeli przekrój ściany z płaszczyzną XY jest kołem, możemy zatem f rozwinąć w szereg:

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots$$

a dodamy analogiczną funkcyę potęgową $g(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots$

Z powodu symetryi ruchu względem osi X musimy zastosować równanie A

z których wynika

$u = \Sigma$

$v = \Sigma$

czyli ~~składowe u, v w~~ składowe prędkości w kierunku promienia wodzącego r i prostopadle:

$V_r =$

$V_s =$

Dla powierzchni koła $r = R$, ~~musimy~~ obie składowe prędkości muszą zniknąć, z czego wynikają relacye

które są sprzeczne ze sobą z wyjątkiem jeżeli wszystkie prędkości u, v w całym obszarze

Aby zbadać rodzaj ruchu w otoczeniu bezpośredniem punktów ±c rozwiniemy funkcye (18) przy użyciu relacyi

$$r \sin\theta = \eta = r_1 \sin\theta_1 \; ; \; r\cos\theta = c + \xi = c + r_1 \cos\theta_1 \; ;$$

Tak otrzymujemy, pomijając wielkości wyższych rzędów:

$$u = +4\sqrt{2c}\,\sqrt{r_1}\,\sin^2\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} \qquad (25)$$

$$v = 4\sqrt{2c}\,\sqrt{r_1}\,\sin^3\frac{\theta_1}{2}$$

co dowodzi, że prędkości w „matematycznie ostrych" końcach krawędzi ±c nie są nieskończoną jakby na pozór sądzić można z (18) i jak by istotnie musiało być w cieczy idealnej, lecz przeciwnie, są zero.

To samo rozwiązanie (25) otrzymuje się z równań ogólnych (16) podstawiając: $f = \sqrt{2c}\,\sqrt{\alpha}$ (26)

i przedstawia to przepływ cieczy nieskończonej naokoło krawędzi matematycznie ostrej.

Linije prądu wynikają z funkcyi prądu ψ oznaczonego według (14, 16): (27)

$$\psi = -\frac{8}{3}\sqrt{2c}\left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\right]^3$$

jako parabole współogniskowe z punktem +c. fig.

Wirowanie i ciśnienie wynika z 13:

$$\zeta = -\frac{4\sqrt{2c}}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} \qquad p = -\frac{4\sqrt{2c}}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} \qquad (28)$$

W punkcie c funkcye te są nieokreślone a znikają w nieskończoności. ψ

zależnie jak to rozumiemy

Podczas gdy ruch (18) i z nim spokrewniony (22) były ruchami i dla tego jedynemi takiemi ruchami możliwemi przy danych ciśnieniach w danem nieskończonem (szczególnie kantowemi), mamy tutaj do czynienia z ruchem nieskończonym ... $\psi = \infty$ w tym przypadku dążącą do $\lim_{r=\infty} \psi \neq \infty$;

czy energia rozpisana równaniem $\int$ po dS

czy punkt osobliwy ± 1 nie przyczynia się?

Ogólnie rozstrzygnąć dla takich punktów?

~~Superponując zaś potencjalny $\varphi_0 = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{s}}{i}$ można otrzymać przepływ naokoło przegrody parabolicznej $y^2 = 4a(a+x)$, mianowicie:~~

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[r \sin^2\frac{\theta}{2} - a\right]$$

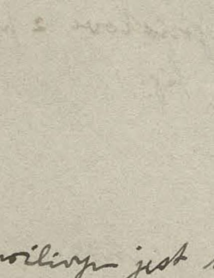
$$v = \frac{1}{\sqrt{r}} \sin\frac{\theta}{2}\left[r \sin^2\frac{\theta}{2} + a\right]$$

?

Ale na tych ściankach ogólnie powstaje prawo przy styczne, zatem $\frac{\partial v}{\partial n}$ nie jest ciągłe

warunek: u, v, w i pochodne pierwsze z nich wszędzie ciągłe z wyjątkiem na ściankach

Wreszcie możliwym jest także ruch spełniający warunek $\overset{t_0 = c:}{u = v = 0}$ przy ściankach ~~...~~ $y = 0$ i oprócz tego jeszcze gdzie indziej n.p. ściana $x = 0$!



Czyby wynikało że brak p dla innych ruchów niemożliwy?

lub że ruch stateczny niemożliwy?

24

nieskończonym
ψ równe zero — co ściśle odpowiada niemożliwości rozwiązania skończonego
z warunkami granicznymi $\frac{\partial \psi}{\partial n} = c$.

Jeśli użyjemy (to dla ścian sztywnych) w naszym przypadku metody (analogicznej do tej która) użytej w hidrodynamice i elektryczności (a ściślej z niej przykłady rozwiązań matematycznych): przyjmowania pewnych funkcyj f i g i dostosowania odpowiednich warunków granicznych (tj. ścian sztywnych) za pomocą relacyj — to przekonamy się że tylko w wyjątkowych razach otrzymamy ruch ψ skończony wśród (wobec) ścian nieszczelnych.

Dla tego przykłady następujące (odnoszące się do ruchów ~~[illegible]~~ ścian płaskich w obecności) mogą przedstawić pewien interes.

Szukamy przedewszystkiem najprostszego ruchu typu kanałowego: tj. przepływu przez otwór w ścianie X

qui corresponde à une certaine forme donnée des parois

Istotnie przedstawia to ruch ~~zadość czyniący~~ spełniający warunki $\lim_{\infty} u, v = 0$ $\lim p = 0$

i jako taki nie może być skończonym według ...

a do ~~[...]~~ określenia jego nie wystarczają owe warunki. (lim $u=v=0$ przyśpieszenia ~~i ciśnienie~~

Łatwo też znaleźć ~~inne~~ odmienne ruchy nieskończone spełniające ten samy warunek, $\lim_{\infty} p = 0$; n.p.

przyjmujące formę: ~~$\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{i}$ i postępując analogicznie~~

~~jak przy (14) otrzymuje się wskutek podstawienia~~ $g=0$ $f = \frac{1}{\alpha}$:

$$\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta) = (\alpha+\beta)[f(\alpha) + f(\beta)] - \alpha f(\alpha) - \beta f(\beta) + g(\alpha) + g(\beta) \qquad (29)$$

i postępując analogicznie jak wobec ~~do~~ (14) znajduje się ~~dla funkcyj jednowartościowych~~

formułki:

$$u = i\left[2\left(f(\alpha) - f(\beta)\right) + (\alpha - \beta)\left(f'(\alpha) + f'(\beta)\right)\right] \qquad (30)$$

$$v = (\beta - \alpha)\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right]$$

które przyjmujemy dla funkcyj jednowartościowych spełnią warunki $u=v=0$ przyśpieszenia.

Podstawiając tutaj: $f = \sqrt{\alpha}$ otrzymujemy:

$$u = -4\sqrt{r}\,\sin\frac{\theta}{2}\left(1 + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \qquad (31)$$

$$v = -4\sqrt{r}\,\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\psi = 8\sqrt{r^3}\,\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 4y\sqrt{r-x}$$

$$p = -\frac{4}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\zeta = \frac{4}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

co przedstawia przepływ cieczy wzdłuż krawędzi ostro zakończonej:

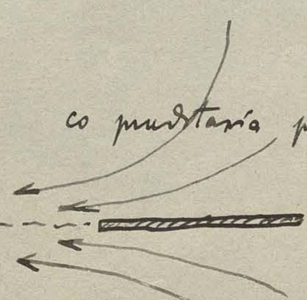


fig.

Kształt linij prądu: $cx = y^2\left[y^2 - \frac{c^2}{4y^4}\right]$

+ Przez superpozycję (31) i (25) otrzymuje się przepływ koło krawędzi ścian schodzących się pod kątem.

a może też pod dowolnym kątem za pomocą superpozycji większej ilości podobnych rozwiązań?

Podobnie jak (25) tworzy poniekąd specyalizacyę rozwiązania (18), tak samo Ściśle omawiany ruch (31) można uważać za specyalizacyę ruchu, który się otrzymuje z równań (30) przez podstawienie $f = \frac{\ldots}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}}$, mianowicie:

$$u = -4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - 4\sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

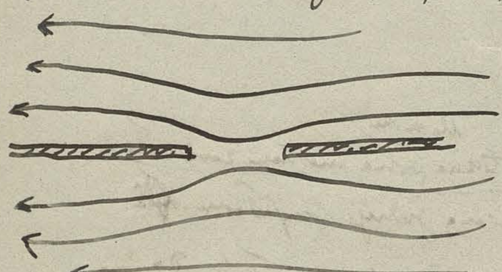
$$v = 4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$\psi = 4 r\sqrt{r_1 r_2}\sin\theta \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} \quad ? \qquad \frac{f(x) - f(z)}{i} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-c^2}}\frac{f}{\sqrt{\ldots}} = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \qquad (32)$$

$$p = 8\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$\zeta = 8\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

Jest to oczywiście także ruch „nieskończony”, odpowiadający przepływowi cieczy wzdłuż ściany, zaopatrzonej otworem, z warunkiem $\lim_{\infty} p = 0$.



Przez superpozycyę ruchów takich rodzajów możemy rozwiązać zadania więcej skomplikowane n.p. zapomocą superpozycyi ruchów (18), przesuniętych stopniowo w kierunku x otrzymujemy przepływ przez system szpar, lub przez „kratę”. Wynika, że całkowita ilość przepływającej przy danej różnicy ciśnienia Δp przez 1 cm długości będzie $F = \frac{n c^2 \pi}{2}\Delta p$ gdzie n oznacza ilość szpar na 1 cm długości, c ich szerokość. Zatem nawet jeśli przegrody będą nieskończenie wąskie,

dla całości
ostateczna osłona przestrzeni zawierała

Wolno superponować, ale nigdy tak aby ~~(ściany jednego przykładu~~ ...

bo w tych miejscach powstałyby braki ciągłości $\frac{\partial u}{\partial x}$ ...

lub naprężenia p_{xx}

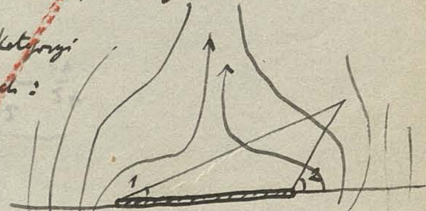
wykraczające praw

tak że $nc = 1$ to przepływ skończona ilość :

$$F = \frac{c\pi}{2}\Delta p = \frac{\pi}{2n}\Delta p$$

więc krata taka wywiera opór $\frac{\Delta p}{F} = \frac{2n}{\pi}$ proporcyonalny do ilości przegród.
(o [illegible] cienkich przegrodach)

Podobnie, superponując dwa równania rodzaju (25) o przeciwnym kierunku (ściany), przesunięte względem siebie na osi X, otrzymuje się przepływ naokoło przegrody płaskiej o cieczy nieskończonej, który jednak należy do kategoryi ruchów nieskończonych:



$$u = \sqrt{r_1}\sin^2\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2} + \sqrt{r_2}\cos^2\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}$$

$$v = \sqrt{r_1}\sin^3\frac{\theta_1}{2} + \sqrt{r_2}\sin^3\frac{\theta_2}{2}$$ (33)

i. t. d. $p =$

Zajmujące jest porównanie ruchów (18) i (25) z odpowiedniemi ruchami o symetryi osiowej, zbadanemi przez Sampsona*) w przekroju osiowym Linie prądu są hyperbolami współogniskowemi, jeśli ściana jest płaszczyzną z otworem (lub hyperboloidą obrotową). W bliskości krawędzi otworu (odległości h) funkcya prądu

$$\psi = \frac{-Vh^2\varrho^3}{3},$$

gdzie ϱ oznacza pierwiastek hyperboliczny równania (według λ^2) $\frac{\varpi^2}{\lambda^2-1} + \frac{z^2}{\lambda^2} = h^2$

staje się identyczną z funkcyą prądu (27) i hyperbole degenerują w parabole.

W bardzo wielkiej odległości zaś od otworu otrzymujemy wzory identyczne z formułkami analogicznemi do (22), przedstawiającemi trzywymiarowy wypływ z źródła w ścianie płaskiej:

*) Phil Trans 182, (1892)

$$x^2\lambda + z^2\lambda - z^2 = h^2(\lambda^2 - \lambda)$$

$$h^2\lambda^2 - \lambda(h^2 + x^2 + z^2)$$

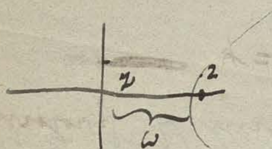
$$\frac{x^2}{\lambda - 1} + \frac{z^2}{\lambda} = h^2$$

$$\lambda^2 - \lambda\left(\frac{x^2+z^2+h^2}{h^2}\right) + \frac{z^2}{h^2} = 0$$

$$\lambda = \frac{h^2+x^2+z^2}{2h^2} \pm \sqrt{\ldots}$$

$$\varrho = \frac{h^2+x^2+z^2}{2h^2} - \sqrt{\left(\frac{x^2+z^2}{2h^2}\right)^2 - \frac{z^2}{h^2}}$$

$$x = h + \xi$$



$$\varrho = \frac{2h^2 + 2h\xi + \xi^2 + z^2}{2h^2} - \left[\left(1 + \frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2+z^2}{2h^2}\right)^2 - \frac{z^4}{h^4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2+z^2}{2h^2}\right]\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\frac{z^4}{h^4}}{\left(1+\frac{\xi}{h}\right.}\right)^2\right.$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad h^2 = -c^2$$

$$\frac{1}{3}\pi c^2 \varrho^3$$

$$\frac{x^2}{\lambda^2+1} - \frac{z^2}{\lambda^2} = c^2$$

$$x^2\lambda^2 - z^2\lambda - z^2 = c^2(\lambda^2 + \lambda)$$

$$\lambda^4 + \lambda^2\left(1 - \frac{x^2+z^2}{c^2}\right) + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z^2 - x^2}{c^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\ldots)^2 - \frac{z^4}{c^4}}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{z^2}{c^2} = \mu^2\varrho^2$$

$$u = \frac{3xy^2}{2r^5} \qquad p = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}$$

$$v = \frac{3y^3}{2r^5} \qquad (34)$$

$$w = \frac{3xz^2}{2r^5}$$

Zaznaczę jeszcze że wypływ dwuwymiarowy z źródła w przestrzeni między ścianami prostopadłemi stykającemi się w źródle dany jest przez funkcję

$$\psi = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2\cos 2\theta$$

$$u = \frac{2\sin 2\theta \cos\theta}{r} \qquad (35)$$

$$v = \frac{2\sin 2\theta \sin\theta}{r}$$

$p =$

A z tego przez superpozycję wed (22) można otrzymać wypływ z źródła w przestrzeni między ścianami stykającemi się pod dowolnym kątem $\alpha = \operatorname{arctg} a$: $\alpha < \frac{\pi}{4}$!

$$u = \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\left[\cos\theta - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sin\theta\right] = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\alpha}\,\frac{\sin(\alpha-\theta)}{r} \qquad (36)$$

$$v = \frac{\sin^2\theta}{r}\left[\cos\theta - a\sin\theta\right] = \frac{\sin\theta\,\sin(\alpha-\theta)}{r\sin\alpha}$$

Prędkość wypadkowa, skierowana wzdłuż promienia wodzącego: $V = \frac{\sin\theta\left[\cos\theta - a\sin\theta\right]}{r}$

$$= \frac{\sin\theta\,\sin(\alpha-\theta)}{r\sin\alpha}$$

Ale te zachowanie się w punkcie O jeszcze niejasne

$\Delta^2 u = \frac{\partial f}{\partial x}$

$\frac{y^2}{r^5} - \frac{5x^2y^2}{r^7}$

$-\frac{5y^2x}{r^7} - \frac{10y^2x}{r^7} + \frac{35x^3y^2}{r^9}$

$\frac{2xy}{r^5} - \frac{5xy^3}{r^7}$

$+\frac{2x}{r^5} - \frac{10xy^2}{r^7} - \frac{15xy^2}{r^7} + \frac{35xy^4}{r^9}$

$+\frac{2x}{r^5} - \ldots$

$\frac{4x}{r^5} - \frac{15xy^2}{r^7} \qquad + \frac{35xy^2}{r^7}$

$\frac{4x}{r^5} - \frac{30xy^2}{r^7}$

$\lambda^2 = tg^2\varphi - \lambda^2 tg^2\varphi$

$\lambda^2 = \frac{tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi}$

$-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}$

$\left(\frac{z}{x}\right)^2 = +\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} = tg^2\varphi = \frac{-q^2}{1-q^2}$

$\frac{3x}{r^5} - \frac{15xy^2}{r^7}$

$q^2 = \frac{tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi} = \sin^2\varphi$

$= \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}$

$q = \sin\varphi = \frac{y}{r} = \cos\theta$

$dq = \cos\theta\, d\theta$

$-\frac{5xy^3}{r^7} \qquad \frac{10y^3}{r^7} + \frac{35y^3}{r^7}$

$\frac{3y^2}{r^5} - \frac{5y^4}{r^7} \qquad \frac{6y}{r^5} - \frac{15y^3}{r^7} - \frac{20y^3}{r^7} + \ldots =$

$\frac{6y}{r^5} - \frac{10y^3}{r^7} \qquad -\frac{3y}{r^5} + \frac{6y}{r^5} - \frac{15y^3}{r^7}$

$\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)\frac{1}{w} \qquad \frac{1}{r^3} + \frac{x^2}{r^5}$

$-\frac{1}{w}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r}\right) = +\frac{x}{r^3} = u_x$

Zauważę że tak samo jak ruch ( ) znajduje się jako forma graniczna pomiędzy ruchami badanymi przez Rayleigha; otrzymuje się go z wzoru 33' loc. cit. robiąc promień koła, w obrębie którego ruch się ma odbywać, nieskończenie wielkim.

Z drugiej strony zajmujące jest porównanie ruchów z odpowiedniemi ruchami o symetryi osiowej, zbadanymi przez Sampsona.[*]

Jeśli ściana płaska jest zaopatrzona otworem kołowym, możliwy jest ruch, którego linie prądu (w przekroju osiowym) są hiperbolami współogniskowemi. Funkcya prądu jest określona przez: $\psi = \frac{Vc^2 q^3}{3}$

gdzie V oznacza prędkość w środku otworu, c jego średnicę, q (współrzędną hiperboliczną punktu x, y, z) pierwiastek hiperboliczny równania dla λ:

$$\frac{x^2}{1-\lambda^2} - \frac{z^2}{\lambda^2} = c^2$$

W bezpośrednim otoczeniu krawędzi otworu (to jest w odstępach małych w porównaniu z średnicą) hiperbole degenerują w parabole i ruch ( ) okazuje się istotnie identycznym z tutaj badanym (§9).

Dla bardzo wielkiej zaś odległości od otworu otrzymujemy z równań Sampsona wzory przedstawiające trzywymiarowy wypływ z źródła w ścianie płaskiej:

---

*) Phil. Trans. 182 p. 449

$\lambda = \frac{2}{3}$

Na przykładzie §   można łatwo pokazać że istnieją także inne ruchy

zadość czyniące tym samym warunkom granicznym t.j. ~~[illegible]~~

t.j. danemu kształtowi ścian i danemu rozkładowi ciśnienia w ∞ przy

, ale ~~być to mogą to być tylko ruchy nieskończone ruch~~ z pomiędzy niemi tylko

ów ruch   będzie skończonym

Przyjmiemy np. formę $\varphi =$

i postąpimy analogicznie jak w   ~~[illegible]~~

Znajdujemy tak rozwiązanie u, v.   które przy ograniczonej dla punktów

jednowartościowych będzie określać ruch w obecności ściany nieruchomej $y=0$.

Podstawiając tutaj $f=\sqrt{1-c^2}$ otrzymamy   (32)

Jest to ruch spełniający warunek $\lim \varphi = 0$ i możnaby go superponować nad

....   ale należy on do klasy ruchów nieskończonych gdyż $\lim \varphi = \infty$

~~Superponując są takie Postępując podobnie jak w~~

~~[illegible] otrzymany ruch - wytworzony przez~~

Jeśli podobnie jak w §   zbadamy rodzaj tego ruchu w otoczeniu p[...]

+1 otrzymamy wzory   (31)   które również można otrzymać bezpośr[...]

(30) przez podstawienie $f=N\alpha$

Przedstawia to przepływ ~~[illegible]~~ styczny cieczy wzdłuż krawędzi ostro zakończonej ~~[illegible]~~

Kształt linii prądu jest ~~[illegible]~~ określony przez równania $cx = y^2[\cdot -\quad]$

Superponując to rozwiązanie ponad odpowiednie §   otrzymalibyśmy wzory

(pomnożywszy je odpowiedniemi stałemi)

odpowiadające przepływowi cieczy koło krawędzi, z dowolną składową styczną i normalną.

Fig. przedstawia n.p. ruch ~~...~~ określony przez

$$\psi = \sqrt{r}^3 \sin^2\frac{\theta}{2}\left[a \sin\frac{\theta}{2} + b \cos\frac{\theta}{2}\right]$$

pod założeniem a = b

Aby przeciwnie zbadać ruch (32) w wielkiej odległości możemy użyć tych samych ~~...~~ rozwinięć jak w ..

~~Otrzymujemy tym sposobem ruch spowodow~~

~~czyli~~, Uprowadzając równoczesny całkowity prąd $\int_{-1}^{+1} u\,dx = 2\pi \sqrt{r}$ otworze ~~...~~

i opuszczając składnik $u = cy$, ~~przedstawiający~~ jako ~~...~~ obojętny dla nas dodatek ruchu potencjalnego, otrzymujemy wzory

(35)

~~...~~ Przedstawiają one ruch ~~powodowany przez~~ powstający w obrębie półprzestrzeni ~~...~~ na miejscu przez element ściany ~~...~~ X w skutek istnienia prądu ~~...~~ prądu stycznego ~~...~~ w punkcie O.

Z drugiej strony można to też interpretować jako ruch wzbudzony w przestrzeni zawartej między ścianami prostopadłemi, wskutek obecności źródła o natężeniu .... w punkcie przecięcia.

$$g'(\alpha) = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$$

$$= \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} - \sqrt{\alpha^2-c^2} = \frac{c^2}{\sqrt{\alpha^2-c^2}} \qquad g = \log(\alpha+\sqrt{\alpha^2-c^2})$$

$$\alpha \sqrt{\beta^2-c^2} + \beta\sqrt{\alpha^2-c^2}$$

$$-\alpha f(\alpha) - \beta f(\beta)$$

$$v = \text{[struck]} + \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) + \text{[struck]}$$

$$u = \frac{1}{i}\left(\text{[struck]} \mp \alpha f(\beta) \pm \beta f(\alpha) + \text{[struck]}\right)$$

$$-\alpha f(\alpha) + \beta f(\beta)$$

~~$f(\alpha) + \alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = v$~~

$$u = -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\theta \ \text{[struck]} - \sqrt{r_1 r_2}\ \text{[struck]}$$

$$\left[\cos\theta - \frac{c^2\sin^2\theta\cos\theta}{r^2}\right]$$

$$v = -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\theta\left(\frac{c^2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right) = -\frac{c^2}{r}\sin^2\theta\cos\theta = -\frac{c^2\sin 2\theta\cos\theta}{2r}$$

$$\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} = 1 - \frac{c^2}{2}\,\frac{1-2\cos^2\theta}{r^2}$$

$$u = -r\,\tfrac{1}{2}\cos\theta\left\{\left(1 - \frac{c^2(1-2\cos^2\theta)}{r^2} + 1 - \frac{c^2\cos^2\theta}{r^2}\right)\right\}$$

$$= -y\left(1 + \frac{c^2\cos^2\theta}{r^2}\right)$$

$$= -y - \frac{c^2\sin\theta\cos^2\theta}{r}$$

$$\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} = 1 - \frac{c^2}{2}\,\underbrace{\frac{1-2\cos^2\theta}{r^2}}_{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$$

$$= \ldots + \frac{c^2\cos 2\theta}{2r^2}$$

33 (19)

~~[illegible]~~

$u = c\frac{xy^2}{r^5}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{r^5} - \frac{5x^2y^2}{r^7}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{r^5} - \frac{5xy^3}{r^7}$

$v = c\frac{y^3}{r^5}$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{5xy^2}{r^7} - \frac{10xy^2}{r^7} + \frac{35x^3y^2}{r^9}$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2.$

$w = c\frac{xy^2}{r^5}$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{r^5} - \frac{10xy^2}{r^7} - \frac{15xy^2}{r^7} + \frac{35xy^4}{r^9}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{5xy^2z}{r^7}$

$p = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right)$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{5xy^2}{r^7} + \frac{35xy^2z^2}{r^9}$

$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{3}\left(\frac{3x}{r^5} - \frac{15xy^2}{r^7}\right)$ $\quad \frac{2x}{r^5} \quad -45 \quad + \frac{35xy^2}{r^7}$

$\frac{2x}{r^5} - \frac{10xy^2}{r^7}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{5xy^3}{r^7}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{3y^2}{r^5} - \frac{5y^4}{r^7}$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{5y^3}{r^7} + \frac{35x^2y^3}{r^9}$

$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{6y}{r^5} - \frac{15y^3}{r^7} - \frac{20y^3}{r^7} + \frac{35y^5}{r^9}$

$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{5y^3}{r^7} + \frac{35z^2y^3}{r^9}$

$\frac{6y}{r^5} \quad - \quad 45 \quad + \frac{35y^3}{r^7}$ $\quad \frac{2}{3}\left(\frac{3y}{r^5} + \frac{6y}{r^5} - \frac{15y^3}{r^7}\right)$

$\frac{6y}{r^5} - 10\frac{y^3}{r^7}$

$\sqrt{u^2+w^2} = \omega\frac{y^2}{r^5}$ $\quad V = \frac{y^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}\cos^2\theta$ $\quad \int \sin\theta\, d\theta \cos^2\theta = \frac{\cos^3\theta}{3} = \psi$

$v = \frac{y^3}{r^5}$

établir exposer

admettons que considérons

reposent sur l'hypothèse .. que nous nous perdons d'indiquer

créer des formules qui reposent

d'étendre l'analyse au cas général

les cas .. qui offrent à cette analyse ses plus intéressantes applications

cas dérivés d'hystérisis exclure, restreindre, se borner à

fixer les notations dont nous ferons usage

il faut et il suffit que

coïncider

remplir une condition

tracer, construire une surface

établir, démontrer, prouver

signaler, noter, remarquer

cas auquel nous avons affaire

une aire

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} =$$

φ na ось

$x\sqrt{1-x^2}$

$= x\sqrt{(1+x)(1-x)}$

$x=0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$\varphi=0$	1761 2041 0·9720 0·9860 0·968 : 4 = 0·242	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}$ $1{\cdot}732 : 4 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 0·433	$\frac{3}{4}\sqrt{\frac{16-9}{16}} = \frac{3\sqrt{7}}{16}$ 42255 4771 89965 −2041 6955 0·496	0
	0·968 . 4 3·872 76·5° 1·334 −0·242 1·092	0·866 . 2 1·732 60° 1·072 0·433 0·614	42250 4771 94545 0·882 41·5° 0·724 0·496 0·228	$\frac{\sqrt{7}}{4}$ / $\frac{1}{3}$ 128 64 0

1·57

1·17 48

0·78

0·39

48 48 38 23

$0{\cdot}65^2$

0·8129

0·6258 − 1

0·422

0·578

7619

88095

0·7602

0·8129

8809

6938

10·0680

4947

$x\sqrt{1-x^2} = 0{\cdot}4941$

0·864

0·374

$x = 0{\cdot}65$

97·12 :2 = 48·56
14·04

104·04 52·02
26·57

110·55 55·28
36·87

116·57 58·29

135 67·5
83·43
4·07

17/16

5/4

25/16 =

2

5

6021
4771
1250

30103
− 4771
− 1761

1139
− 6021
5118

23045 / 20412 / 02633 / 9·3899 / 9·75335 / 9·1646

0969 / 9·6506 / 9·7475 / 9·6386 / 9·6441 / 9·3807

1938 / 9·7782 / 9·4994 / 9·4714 / 1250

3010 / 9·8495 / 9·3733 / 9·5238

6990 / 9·9515 / 8·2426 / 8·8930 / 6096 / 9·5026

5118 / 9·9202 / 9·0932 / 9·5242 / 1761

6021 / 9·7667

3010 / 9·6817

4/3 / 9·5964

1

1/2 / 30103 / 9·2016

2/3 / 9·3481

$$\alpha f'(\alpha) - f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \sqrt{\alpha^2-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$g(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} = \lg(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})$$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-1}} - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2-1}} + f(\alpha) - f(\beta)\right] = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}$$

$$= 2\sqrt{r_1 r_2}\,\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \overbrace{I \lg(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})}^{b}$$

α

9 : 16 = 5

6·39

1·60

452 : 4

1·13

$\sqrt{43}$

0'92 . 3/4
276
0'69 49
1'18 34
1'52 32
1'86 30
2'14 26
2'38

1'5 . 3/4
45
1'12 38
1'5 33
1'83 30
2'13

1'6 . 3/4
1'2

1'22 . 3/2
0'61
1'83
1'24 .
1'42 . 3/2
0'71
2'13
1'59 . 3/2
477
238

1'44 . 3/2
72
216

$\alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta)$

$v = f(\alpha) + f(\beta) + \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) + g'(\alpha) + g'(\beta)$

$f(\alpha) + \alpha f'(\alpha) = - g'(\alpha)$

$\sqrt{\alpha^2-1} + \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} = -g'(\alpha) = \frac{2\alpha^2-1}{\sqrt{\alpha^2-1}} = 2\sqrt{\alpha^2-1} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$

$\int d\alpha \sqrt{\alpha^2-1} = \alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \int \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} d\alpha \qquad g(\alpha) = -\alpha\sqrt{\alpha^2-1}$

$\psi = \alpha\beta\left(\sqrt{\beta^2-1} \pm \sqrt{\alpha^2-1}\right) = \alpha\sqrt{\beta^2-1} + \beta\sqrt{\alpha^2-1} - \alpha\sqrt{\alpha^2-1} - \beta\sqrt{\beta^2-1}$

$= -(\alpha-\beta)\left[\sqrt{\alpha^2-1} - \sqrt{\beta^2-1}\right] = r\cos\theta \cdot \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

$= - r\sin\theta \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

$= -y\sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

$v = \alpha\left[f'(\beta) - f'(\alpha)\right] + \beta\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right]$

$= (\alpha-\beta)\left[f'(\beta) - f'(\alpha)\right]$ $\qquad \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}$

$= \frac{-r^2\sin\theta}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$ $\qquad r\sin\theta\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-1}} - \right)$

$u = \frac{1}{2}\left\{f(\beta) - f(\alpha) + g(\alpha) - g(\beta) + \beta f'(\alpha) - \alpha f'(\beta)\right\}$

$- f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$

$+ f(\beta) + \beta f'(\beta)$

$= \frac{1}{2}\left\{2\left[f(\beta) - f(\alpha)\right] + (\beta-\alpha)\left[f'(\alpha) + f'(\beta)\right]\right\}$

$= -\sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} \pm \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

$$(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2} = 8\ \frac{-y^2 x}{r^4}$$

$$\frac{4a}{8}$$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

224

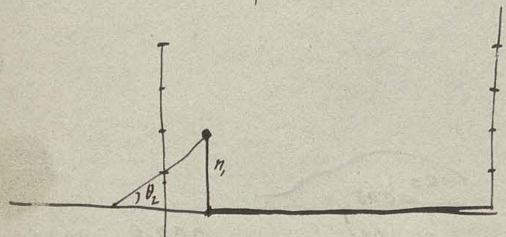
$\lim_{\infty} \psi = -y^2$

	ψ_∞	ψ_0
$y = 1$	-1	-2
$y = 2$	-4	-10
$= 3$	-9	-30

$x=0$: $\psi = -y\sqrt{r_1 r_2}$ = ~~…~~

$\psi_0 = -y\sqrt{(y^2+1)}$

$y = \frac{1}{2}$	$\psi_\infty = \frac{1}{4} = 0.25$	$\psi_0 =$ ~~$\frac{5}{8} = 0.64$~~ 0.558
$y = 1$	1	$\sqrt{2}$
$y = \frac{3}{2} = 1.5$ (1.42)	$\frac{9}{4} = 2.25$	~~…~~
$y = 2$	4	~~$\sqrt{20}$~~ 4.48
$y = \frac{3}{4}$	$\psi_\infty = \frac{9}{16} = 0.56$	$\psi_0 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{25}{16}} =$ ~~…~~



$6.6 \parallel \frac{15}{16}6 = 0.94$

7.5 … 0.94
100
103 150

$y = 1.7$ .17
1.19
3.89.17
2723
66

2.9

1.16.
1.08. 0.4
0.43

$y = 1.2$

$\sqrt{2.44}$ = 1.56 3.12
313
1.87

$\sqrt{2.68}$ = 1.64.13
49
2.13

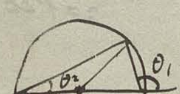
1.4. 14
56
2.96. 14
1184
4.14

$\psi = y^{3/2}\sqrt{y^2+4}\,\sin\left(\frac{\theta_2}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\left(\sin\frac{\theta_2}{2}+\cos\frac{\theta_2}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{\frac{1-\cos\theta_2}{2}} + \sqrt{\frac{1+\cos\theta_2}{2}}$

~~$= \frac{1}{2}\sqrt{y^2+4}\ldots$~~



$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta_2$

$\frac{\theta_1+\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4} + \theta_2$

$y = 0.71$	$\psi_\infty = \frac{1}{2}$	0.45 33
1	1	0.78 25
1.22	$\frac{3}{2}$	1.03 22
1.42	2	1.25 19
1.58	2.5	1.44 16
1.73	3	1.60
1.87	3.5	1.75 15
2	4	1.88 13 12
	4.5	2

$\psi = -y\sqrt{r_1 r_2}\,\sin\left(\theta_2+\frac{\pi}{4}\right) = -y\sqrt{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.4}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\theta^{3/2}.\sqrt{2}.\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\theta = 30°$ $\frac{1\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4} = 1.732 : 4 = 0.433$ 67

350)
9.7586
9.8793
9.9479
1505
9.7363

17.5
45
62.5

0.545

~~0.87 . √1.5 . 0.886~~

33° 0.5

$\psi = 0.65$

$\sqrt{2.21}$

$= \sqrt{2}.\sqrt{1.105}$

$= \sqrt{2}.\ 1.05$ 2.17
105
1.26. 142
504
25
1.79

116
142
142
85
1.65
1.42

$\sqrt{3.25}$

3.56

1.80. 15
9
2.7
1.89. 16
113
3.0

$c = r\sin\theta \sqrt{r\sin\frac{\theta}{2}} = y \sqrt{\frac{c^2}{y^2}(1-\cos\theta)}$

$c = y\sqrt{r(1-\cos\theta)}$

$= y\sqrt{r-x}$

$\left(\frac{c}{y}\right)^2 + x)^2 = x^2 y^2$

$\left(\frac{c}{y}\right)^4 + \frac{2c^2 x}{y^2}$

1761 3979
3522 7958
1174 2653

6990.
13980
4660

2.92

20° 9.53405
9.23967
8.77472
1.2253
0.4084
0.8168

(0.56)

$\frac{c^2}{y^2} = r - x$

$\left(\frac{c^2}{y^2}+x\right)^2 = r^2 = x^2 y^2$

$\frac{c^4}{y^4} + \frac{2c^2 x}{y^2} = y^2$

$x = \frac{y^2}{2c^2}\left(y^2 - \frac{c^4}{y^4}\right)$

c = 0.63
1 1.21 1
2 1.84 1.59
3 2.08
4 2.52

6020 7993
2007
9542
3181
2007
4014

$\psi = 2\sqrt{r^3}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = r\sin\theta\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{r^3}} = \frac{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}{c}$

$r = \left(\frac{c}{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}\right)^{2/3}$

30° 9.69897
9.41300
9.11197
$\frac{2}{3}$(+0.888
0.296. 2
+0.592
~~0.458~~

r = 3.94
2.346
6.2

40° 9.80807
9.53405
9.3421
6579
13158 :3 = 4386
(c=1)
(2.75)
1.65
(4.4)

60° 9.69897
9.93753
9.6365
0.3635
0.727
0.2423
r = 1.747
1.0478
(c=1) (2.80)

9.84949
0.15051
30102
0.1003
r = 1.26
756
(2.02)

1.75. 2.52
350
875
95

110° 9.91336
9.7299
88635
11365
2273
0791
r = 1.20

120° 9.93753
9.93753
87506
0.12494
0.24988
0.08329
r = 1.211
727
(1.94)

150° 9.69897
9.98494
9.6839
0.3161
0.6322
0.2107
r = 1.63
98
(2.61)

160° 9.99335
9.53405
9.5274
0.4726
0.9452
0.3151
r = 2.07
124
(3.41)

170° 9.23967
9.99834
9.2380
0.7620
2540
0.508
r = 3.22
193
(5.15)

0
0

30°	60°	90°	120°	150°	180°
0.259	0.5	0.707	0.866	0.966	1.0
0.0863	0.167	0.236	0.289	0.322	0.333
0.966	0.866	0.707	0.5	0.259	0.
1.052	1.033	0.943	0.789	0.581	0.333
0220	·0141	9745	8971	7642	5224
8.8260	9.3979	9.6990	8750	9699	
8.8480	9.4120	9.6735	9.7721	9.7341	9.5224

$= \frac{3}{2} \lg r$

$\frac{2}{3}$(1.1520	0.5880	0.3265	0.2279	0.2659	0.4776
2.304	1.176	0.653	0.4558	0.5318	0.9552
0.7660	0.3920	0.2177	0.1519	0.1773	0.3184
7.58	3.21	2.15	1.85	1.95	2.70
r = 5.83	2.47	1.65	1.43	1.50	2.08
210	240	270	300	330	360
105	120	135	150	175	
0.966 (75)	866	707	0.500	259	
−322	289	236	167	086.3	
−259	−500	707	866	966	
0.063	−211	−471	−699	−880	
0.7993−2	0.3243−1	6730	8445	9445	
9.9699	9.8750	6990	9.3979	8.8260	
8.7692	9.1993	9.3720	9.2424	8.7705	
1.2308	0.8007	0.6280	0.7576	1.2295	
2.4616	1.6014	1.2560	1.5152	2.4590	
0.8205	0.5338	0.4187	0.5051	0.8197	
6.62 / 39.72	3.42 / 20.52	2.62 / 15.72	3.20 / 19.2	6.60	3.78
1.99 / 4.13	1.03 / 2.15	3.41	4.16	1.91	4.16
8.61	4.75	7.65	2.02	8.58	

1	0.63	2x
2	1	
3	1.31	
4	1.59	
5	1.84	
6	2.08	

$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -3$

71°50

108°50

$\theta = 217°$

230
115
65
95728
0·906
0·302
−0·422
0·6385 −1
9·9146
9·5531
0·4469
0·8938
0·2979

$m = \sqrt{1-x^2}$

91456
822
0·178
0·724
8597
9146
9·7743
0·2257
0·4514
0

2504
6252
−0·120
0·0792 −1
9·9146
9·9938
1·0062
2·0124
0·6708

469 . 63.47
141 / 61
282
141
2·96

3150
157·5
22·5

9·58284
9·1657
0·383
0·1277
−0·924
9·1657
0·796
9009
1657
9·0666
0·9734 .2
1·8668
0·62227

9·96562
9·1876
0·8124 .2
1·6248
0·5416

4·19 .6
2514
125
2·639
4·2.
126
5·46

1950
97·5°
82·5°

99627
99254

0·9914
0·33047
−0·13053
0·19994

9·9925
2010
9·2935
0·9065 .2
1·4130
0·4710

2·96
89
3·85

63·3
1·8·9

x = 1		θ	$θ_2$		$θ_1$	$\frac{θ_1+θ_2}{2} - θ$	← log	log $\frac{θ_1+θ_2}{2}$
					90°	34.52°	9.75335	9.8749
y = 1/4	= 0.25 0.125	14.04°	7.120	48.66		25.45	9.6332	9.89665
1/2		26.57°	14.04°	52.02		18.41	9.4994	9.9148
3/4	75 375	36.87°	20.55° ~~26.57~~	55.28		13.29	9.3733	9.9298
1		45°	26.57°	58.24				
						4.07	+ 8.2425 6096	9.9656
2		63.43°	45°	67.5				
						7.12°	9.09324	9.9516
3/2		56.32°	36.87°		63.44			

9.3849

~~9.9~~

9.6506

9.7782

9.8495

9.9515

1 9.9202

90
126.87
63.44°
− 56.32
7.12

~~9.9516~~

u = + 0.1461	0.2403	0.2961	0.3341	0.3345	0.3182
+ 7497	7882	8219	8507	8946	9238
v = − 0.5844	4806	3945	3341	2229	1591
+ 0.1653	0.3076	0.4274	0.5166	0.6717	0.7647
2183	4880	6308	7132	8272	8835
1646	3807	4714	5238	5242	5026
0537	1073	1594	1894	3030	3809
113	128	144	155	201	240

$$\lg(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}) = a + ib$$

$$a = \lg\left[r\cos\theta + \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$$

$$b = \operatorname{arctg}\left(\frac{r\sin\theta + \sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{r\cos\theta + \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)$$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\sqrt{\beta^2-1} - \beta\sqrt{\alpha^2-1} + \lg(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}) - \lg(\beta+\sqrt{\beta^2-1})\right]$$

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{1}{i}\left\{\sqrt{\beta^2-1} - \sqrt{\alpha^2-1} - \alpha\beta\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}\right\}$$

$$u = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)$$

$$\frac{1-\alpha^2-\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2-1}} =$$

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \sqrt{\alpha^2-1}$$

$$g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$\psi = r\sqrt{r_1 r_2}\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{r\sin\theta + \sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{r\cos\theta + \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)$$

$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} = = e^{\cancel{x+iy}} e^{a+ib}$

$x + iy + \sqrt{x^2 - y^2 - 1 + 2ixy} = e^a \cos b + i e^a \sin b$

~~$\sqrt{\alpha^2 - 1} = X + iY$~~

~~$\alpha^2 - 1 = X^2 - Y^2 + 2iXY = x^2 - y^2 - 1 + 2ixy$~~

~~$X^2 - Y^2 = x^2 - y^2 - 1 = X^2 - \left(\frac{xy}{X}\right)^2$~~

~~$XY = xy$~~

~~$X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + 2xy - y^2 - 1}$~~

~~$X^4 - X^2(x^2 - y^2 - 1) = x^2y^2$~~

$r \cos\theta + \sqrt{r_1 r_2} \cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = e^a \cos b$

$r \sin\theta + \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = e^a \sin b$

$$\operatorname{tg} b = \frac{r \sin\theta + \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}{r \cos\theta + \sqrt{r_1 r_2} \cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} = r \sin\theta + \sqrt{\frac{r_1 r_2}{2}\left(1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)\right)}$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{y + \sqrt{\frac{r_1 r_2 - x_1 x_2 + y^2}{2}}}{x + \sqrt{\frac{r_1 r_2 + x_1 x_2 - y^2}{2}}}$$

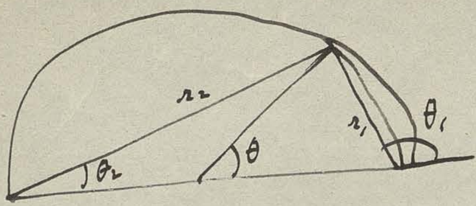
$> \cdot - \cdot - \cdot <$ $\theta_2 = \theta = 0$ $\theta_1 = \pi$

$\vdash_x$ $\psi = x\sqrt{1 - x^2}$ $+$

dla krzywy $y = 0$

~~$\operatorname{tg} b = \frac{0 + \sqrt{1 - x^2}}{x + \sqrt{(1 - x^2)}} = 0$~~ $b = 0$

$$\operatorname{tg} b = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{x} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$



$$\theta_2 = \frac{\theta}{2}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \theta_2$$

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{\pi}{4} + \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$$

$$\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$r_1 = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

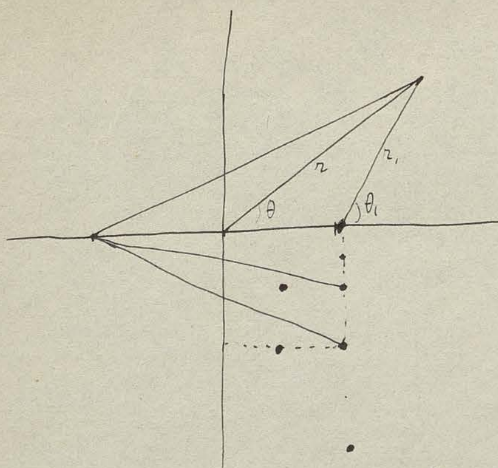
$$r_2 = 2 \cos \frac{\theta}{2} \qquad r = 1$$

$$r\sqrt{r_1 r_2}\, \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) = ~~2\sqrt{\sin}~~ \sqrt{2 \sin\theta} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$b = \operatorname{arctg} \frac{\sin\theta + \sqrt{2\sin\theta} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\theta + \sqrt{2\sin\theta}\, \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

~~θ = 45°~~: 75 ~~30° 60° 15° 75°~~

15°	30°	45	60	75
52.5	60°	67.5	75°	82.5°
			9·98494	9·99627
9·89927	9·93753	~~10·...~~ 9·96562	9·96876	9·99247
9·70650	9·84948	9·92475	15051	15051
15051	15051	15051		
9·75648	9·93752	10·04088	0·10421	0·13925
		776 / 3440		67 / 25
0·5709	0·866	1099	1·271	1·378
2588	500	707	0·866	0·966
0·8297	1·366	1·806	2·137	2·344
~~9·11570~~	~~9·4130~~	9·5828	9·4130	9·1157
9·7845	9·6990	0753	1193	1430
9·8570	0000			
9·6415	9·6990	9·6581	9·5323	9·2587



$$\frac{r_1}{r} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta_1}$$

0·125

$y = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{4+\tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

6152
3010
3142

$\frac{1}{4}$

6990
3495

$\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \theta$

	r_1	r	r_2	θ	θ_1	θ_2				
x = 1, y = 1	1	$\sqrt{2}$ 1·42	$\sqrt{5}$ 2·24	45°	90°	26·6°	13·3°		1·62	116·6, 58·3, 45, 13·3
y = ½	½	$\frac{\sqrt{5}}{2}$ = 1·12	2·06	26·6°	90° —	14°	25·4°	52°	1·28	52, 26·6, 25·4
y = 2	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	63·4°	90°	45°	4·1°		11·3	
y = ¼	¼	1·03	2·01	14°	90°	7·1°	34·5°		1·16 ?	135 : 2 = 67·5, 63·4, 4·1

~~52·1~~ 90·1
48·55
14·
34·5

$$\frac{v}{u} = -\operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{r^2}\,\frac{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\sin\theta\,\sin\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$$

$\frac{5}{4} = 1·25$

9·89653
9·38034
0·51619

9·65104
9·63239
0·03691
9·38034

9·96562
8·8919
1·0737

~~4~~8·24151
9·95141
6990
8·8919

9·87479
9·1624
0·7124

9·75313
9·78368
0·0256
9·1624

3·282
− 2
1·28

11·85
− 0·5
11·3

5·16
− 4
1·16

($\frac{1}{2}$)

9·92983
9·51234
0·4175

9·84949
9·36182
0·30103
9·51234

2·615
− 1
1·615

45

0·438	0·500	0·4551	0·3206	0·1814
966	866	707	5	2588
1·404	1·366	1·162	0·841	0·440
-9191	~~1524~~	~~0~~653		
9191	~~1524~~	2567	3298	3699
1473		0653	9248	6435
9·7718	10·0	10·1914	4050	7264
30·60	45··	57·24	68·52	79·37
~~0·523~~ 18.6 11 0·523 11	0·785	0·995₄	1·187 9	1·379₆
b= 0·534 438	0·785 500 0·78	0·999 455	1·196 941 (1·17)	1·385 181

10°

50°

9·8842	9·8081	7958
9·6198	9·6198	−1348
1505	1505	·9·6610
9·6545	9·5784	

24·60° = 0·419
10
0·429

0·4513	0·3788
1736	9848
0·6249	1·3636

37·5°	30°	22·5°	15°	7·5°
9·78445	9·69897	9·58284	9·41300	9·11570
9·8570	0	·0753	1193	1430
9·6415	9·69897	9·6581	9·5323	9·2587
0·438	0·500	0·455	0·341	0·181

1·57 1·18 0·78₅ 0·39₂

x = 0, 1·57 — 48/8 — 0·21 — 1·09, x = 0·25 — 17 — 9 0·41 — 0·61₄, x = 0·5 — 0·37₄, x = 0·65

157 1·204 0·855 0·544 0·285 0·096

0·366 ~~1·375~~ 0·35 ~~1·18~~ 0·31 ~~1·18~~ 0·26 ~~0·785~~ 0·17 ~~0·534~~ 0·096 ~~0·419~~

ϑ = 75° ϑ = 60° ϑ = 45° ϑ = 30° ϑ = 15° ϑ = 10°

24/35 ·15 — 7/33·11 — 3·3 — ·11/23 15

z = ∞ 90° — θ = 78·5° — 66° — 50·5° — 50

17·5 12·5 15

tg 11·5 = 0·203 tg 24° = 0·445 tg 39·5° = 0·824

16° 17° 20° 37°

ϑ = 74° 56·7° 37°

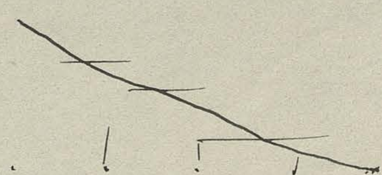
tg = 3·49 1·52 0·75₄

14 608 30

16° 33·3°

0·287 0·657

11·5 26·7



$x = 1$

$x_1 = 0$

~~y_1~~ = $x_2 = 2$

$r_1 = y =$	$\frac{1}{4}$ (0·25)	$\frac{1}{2}$	~~$\frac{3}{4}$~~	~~1~~	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$r_2 =$	2·01	2·06	2·13	2·24	2·5	2·84	3·205	
	~~2·04~~ 0·5025	1·03	1·56	2·24	3·75	5·68	8·01 (16·025)	
	− 0·0625	0·25	0·56	1	2·25	4	6·25	
	0·44	0·78	1·04	1·24	1·5	1·68	1·76	
$\sqrt{r_1 r_2 - y^2} =$	$\sqrt{0{\cdot}22}$	0·39	0·52	0·62	0·75	0·84	0·88	
	= 0·47	0·625	0·72	0·79	0·87	0·92	0·94	

+1 = +∞

	0·565	1·28	2·16	3·24	6·0	9·68	14·26
	$\sqrt{0{\cdot}28}$	0·64	1·08	1·62	3·0	4·84	7·13
	= $\frac{0{\cdot}53}{0{\cdot}47}$	$\frac{0{\cdot}8}{0{\cdot}625}$	$\frac{1{\cdot}04}{0{\cdot}72}$	$\frac{1{\cdot}27}{0{\cdot}79}$	$\frac{1{\cdot}73}{0{\cdot}87}$	$\frac{2{\cdot}20}{0{\cdot}92}$	$\frac{2{\cdot}67}{0{\cdot}94}$
tg =	724	903	017	104	238	342	427
	672	796	857	898	940	964	973
	10·052	10·107	160	206	298	378	454
	48·5	52°	55·3	58·1	63·3	67·3	70·1
θ =	0·846(−1)	0·908	0·965	1·01	1·106	1·176	1·224
	0·7013(−1)	9·0128	9931	3502	5740	7543	9036

0·8506(−1)	0·0064	0·0965	0·1751	0·2870	0·3771	0·4518
9·7533	6332	4994	9·7733	0932	8·8527	
0·0128	0492		1505		~~0·4315~~ 3495	
9·6167	9·6888		9·6989		~~1·6807~~	
0·846	908		~~1·010~~		9·5787	
− 0·414	0·488		0·500		1·1767	
0·432	~~0·203~~		0·51		0·379	
	0·420				0·797	

$\lim_{\infty} \varphi = \theta - \frac{\sin 2\theta}{2}$

150

$\theta = 45°$ 0·7854 − 5 = 0·2854

$\theta = 60°$ 1·0472 − 433 = 0·614

$\theta = 75°$ 1·309 − 25 = 1·059

50° 0·8727 − ~~382~~ ~~0·4910~~ 4924 = 0·380

51° : 0·890 102 78 − ~~~~ ~~0·567~~ 489 = 0·401

9·6716

$\theta = 65°$ = 1·134 − 383 = 0·751

66° = 1·152 132 48 − 372 = 0·780

$\theta = 76°$ 1·326 152 28 − 235 = 1·091

4695

$\theta = 78°$:

156 24 6093 4667

1·361 − 203 = 1·158

20 7

1 2

$\frac{2}{7} \cdot 2$

~~$$\iint \Big\{ u\big(p + \tfrac{2}{3}\mu \,\mathrm{div} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\big)\cos nx + u\mu\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\cos ny + u\mu\Big(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\Big)\cos nz$$
$$+ \dots$$
$$+ \dots \Big\} dS$$~~

$$\iint (p_{xx}\cos nx + p_{xy}\cos ny + p_{xz}\cos nz)\,u + \dots \qquad =$$

$$\iiint \Big[\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}u + p_{xy}v + p_{xz}w) + \frac{\partial}{\partial y}(p_{xy}u + p_{yy}v + p_{yz}w) + \frac{\partial}{\partial z}(\qquad)\Big]\,d\tau$$

$$p_{xx}\,u\,dz\,dy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}u) = p_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}$$

$$p_{xx}u\,dy\,dz\Big|_{S_1}^{S_2} = \int \frac{\partial}{\partial x}(p_{xx}u)\,dx\,dy\,dz$$

Voraussetzung: $(p_{xx}u)$ stetig überall innerhalb

~~(nicht notwendig an Oberfläche)~~

$u\,v\,w$ überall stetig

$\frac{\partial u}{\partial x}$ etc. im Innern

$$= \iiint u\overbrace{\Big(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\Big)}^{\frac{Du}{Dt}} + v(\qquad) + w(\qquad)$$

$$\underbrace{+\,p_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + \dots}_{\Phi}$$

$$= \rho u\Big(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\Big) + \dots \qquad + \Phi$$

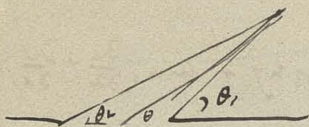
Voraussetzung V^2 überall stetig

$$= \frac{\rho}{2}\Big(u\frac{\partial u^2}{\partial x} + v\frac{\partial u^2}{\partial y} + w\frac{\partial u^2}{\partial z}\Big) \dots \qquad + \Phi$$

$$= \frac{\rho}{2}\Big(u\frac{\partial V^2}{\partial x} + v\frac{\partial V^2}{\partial y} + w\frac{\partial V^2}{\partial z}\Big) + \Phi = u\,V^2\,dy\,dz \;-\; \text{~~}\int V^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big)\text{~~}$$

$$+\,v\,V^2\,dx\,dz$$

$$+\,w\,V^2\,dx\,dy$$



dla dużych r: $\sqrt{\frac{r}{r_1 r_2}} = 1 + \frac{\cos 2\theta}{2r^2}$

$$\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$

$$u_\infty = -4r\left(1+\frac{\cos 2\theta}{2r^2}\right)\sin\theta\left(1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2r^4}\right) - \frac{4r}{1+\frac{\cos 2\theta}{2r^2}}\sin\left\{\theta + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right\}$$

$$\sin\theta\left(1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2r^2}\right)$$

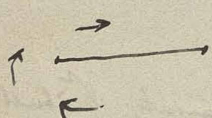
$$+ \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{r^2}$$

$$= -4r\left\{\sin\theta\left[1+\frac{\cos 2\theta}{2r^2}\right] + \frac{1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2r^2}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}}{1+\frac{\cos 2\theta}{2r^2}}\right\}$$

$$\cos^2 - \sin^2 = \cos 2\theta$$

$$= 1 + \frac{\cos^2\theta}{2r^2}(2-\sin^2\theta)$$

$$\frac{\left(1+\frac{\cos 2\theta}{2r^2}\right)^2 + \left(1+\frac{\cos^2\theta\cos 2\theta}{2r^2}\right)}{1+ \dots}$$



$$\iiint (F\nabla^2 G - G\nabla^2 F)\,dv = \iint \left(F\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial F}{\partial n}\right)dS$$

$$(\nabla^2\psi)^2 = \Phi$$

$$= \iint \left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\xi}{\partial n}\right)dS$$

$$\iiint \psi\,\nabla^2\psi\,dv = \iint \psi\frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS - \iiint\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]dv$$

$$-\frac{\partial\xi}{\partial s}$$

$$\psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$$

$$v = f(\beta) + f(\alpha) + \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha) + g'(\alpha) + g'(\beta)$$

$$f(\beta) + f(\alpha) + g'(\alpha) + g'(\beta) = -\left[\beta f'(\beta) + \alpha f'(\alpha)\right]$$

$$g'(\alpha) = -\left[f(\alpha) + \alpha f'(\alpha)\right]$$

$$g(\alpha) = -\alpha f(\alpha)$$

=

$$\psi = \sqrt{r}\left[\cos\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= -\sqrt{r}\; 2\sin 2\theta \sin\theta$$

$$= -2\sqrt{r}\,\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\psi_0 = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\sqrt{r}\left[\cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right] = 2\sqrt{r}\,\cos 2\theta\cos\theta$$

$$\psi = 2\sqrt{r}\cos\theta\left[\cos^2\theta - \sin^2\theta\right]$$

$$\psi = x\, R f(z) + R\varphi(z)$$

$$\psi = (\alpha+\beta)\left[f(\alpha) + f(\beta)\right] + g(\alpha) + g(\beta)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = f(\alpha) + f(\beta) + (\alpha+\beta) f'(\alpha) + g'(\alpha)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta} = f'(\beta) + f'(\alpha)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha^3}} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)$$

~~$u = \frac{2}{i}\, f(\alpha) - f(\beta)$~~

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 2\left[f(\alpha) + f(\beta)\right] + 2(\alpha+\beta)\left[f'(\alpha) + f'(\beta)\right] + g'(\alpha) + g'(\beta) = 2Rf + 4x\,Rf' + Rg'$$

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = 2(\alpha+\beta)\frac{\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right]}{i} + \frac{g'(\alpha) - g'(\beta)}{i} = 4x\,If' + Ig'$$

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2 + \left(i\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)\right)^2 = 4\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 0$$

$$V^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2$$

wymaga albo $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0$

albo $\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 0$

$$f(\alpha) + f(\beta) + \beta f'(\alpha) + g'(\alpha) = 0$$

$$\equiv f(\alpha) + f(\beta) + \alpha f'(\beta) + g'(\beta) = 0$$

~~wymaga aby $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$ ...~~

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{a^2} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{b^2} = 1$$

$$\alpha^2+\beta^2 + c\alpha\beta = d$$

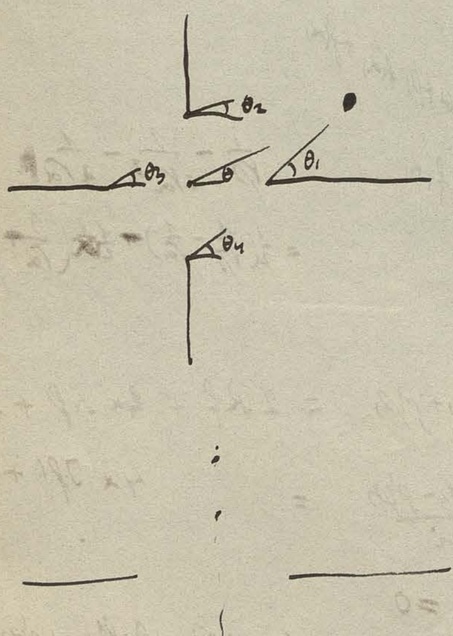
$$\alpha^4 - 1 = (\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha+i)(\alpha-i)$$

$$f = \sqrt[4]{\alpha^4-1} \qquad f' = \frac{\alpha^3}{(\alpha^4-1)^{3/4}} = \left(\frac{\alpha}{\sqrt[4]{\alpha^4-1}}\right)^3$$

$$g'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha^4-1)^{3/4}}$$

$$u = -2y \frac{r^3}{(r_1 r_2 r_3 r_4)^{3/4}} \operatorname{sen}\left[3\theta - \frac{3(\theta_1+\theta_2 \cdots)}{4}\right]$$

$$v = (r_1 r_2 r_3 r_4)^{1/4} \sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\cdots\theta_4}{4}\right) + y\frac{r^3}{(r_1 \cdots r_4)^{3/4}} \cos\left[3\theta - \frac{3(\theta_1+\theta_2 \cdots)}{4}\right]$$



$$(r_1 r_2 r_3 r_4) - r^4$$

$$f(\alpha) = \sqrt{\alpha^2-1}$$

$$g' = \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \sqrt{\alpha^2-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \qquad \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \; e^{-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) + g(\alpha) - g(\beta)\right] \quad \Big\| \quad \psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta)$$

Superpozycje I + II

$$f(\alpha) = a$$

$$\psi = ay + \frac{g(\alpha) - g(\beta)}{i} \qquad \psi = ax + \frac{g(\alpha) + g(\beta)}{2}$$

$$u = -a + g'(\alpha) + g'(\beta) \qquad u = i\left[g'(\alpha) - g'(\beta)\right]$$

$$v = \frac{g'(\alpha) - g'(\beta)}{i} \qquad v = a + g'(\alpha) + g'(\beta)$$

$$\left[-a + g'(\alpha) + g'(\beta) + \frac{h'(\beta) - h'(\alpha)}{i} C\right]^2 + \left[\frac{g'(\alpha) - g'(\beta)}{i} + Ca + \left[h'(\alpha) + h'(\beta)\right]C\right]^2 = 0$$

$$g'(\alpha) = \alpha^n$$
$$h'(\alpha) = \alpha^m$$

$$\left[-a + r^n \cos n\theta - C r^m \sin m\theta\right]^2 + \left[Ca + r^n \sin n\theta + C r^m \cos m\theta\right]^2 =$$

~~$a^2(C^2+1) + r^{2n} + C^2 r^{2m} +$~~ biorąc $n = m$

$$\left[-a + r^n(\cos n\theta - C \sin n\theta)\right]^2 + \left[Ca + r^n(\sin n\theta + C\cos n\theta)\right]^2 =$$

$$a^2(C^2+1) + 2r^n a(C \sin n\theta - \cos n\theta + C \sin n\theta + C^2 \cos n\theta)$$
$$+ r^{2n}(1 + C^2)$$

$$1 + \frac{2r^n}{a} \, \frac{C^2 \cos n\theta + 2C \sin n\theta - \cos n\theta}{1 + C^2} + \frac{r^{2n}}{a^2} = 0$$

dla $C = 1$:

$$1 + \frac{2r^n}{a} \sin n\theta + \frac{r^{2n}}{a^2} = 0$$

$$\frac{r^n}{a} = R \qquad 1 + 2R \sin n\theta + R^2 = 0$$

$$R = \sin n\theta \pm \sqrt{\sin^2 n\theta - 1} \qquad \text{Compl.}$$

Ogólnie $1 + 2R \frac{(C^2-1)\cos n\theta + 2C \sin n\theta}{1+C^2} + R^2 = 0$

$$(1+R)^2 + 2R \frac{(C^2-1)\cos n\theta + 2C \sin n\theta - 1 - C^2}{1+C^2}$$

Przyjmując: $\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) + g(\alpha) - g(\beta)\right]$

$f(\alpha) = \sqrt{\alpha}$

$g'(\alpha) = -\frac{\sqrt{\alpha}}{2}$

$g(\alpha) = -\frac{\sqrt{\alpha}^3}{3}$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\sqrt{\beta} - \beta\sqrt{\alpha} + \frac{\beta\sqrt{\beta} - \alpha\sqrt{\alpha}}{3}\right] = \frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^3}{3i} = \sqrt{r}^3 \sin^3\frac{\theta}{2}$$

~~$\sqrt{u^2+v^2}$~~ $= r_1 \sin^4\frac{\theta_1}{2}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = -\frac{1}{i}\frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{1}{i}\frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}{2\sqrt{\beta}}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^4}{4\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\left(\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\right)^4}{r} = r\sin^4\frac{\theta}{2}$$

ścianut

~~$\Phi_1 = -\frac{1}{i}\frac{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})^2}{2\sqrt{\alpha}}$~~

$$\Phi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = M + iN$$

$$\Phi_2 = \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = M - iN$$

$$\Phi_1\Phi_2 = \underbrace{M^2 + N^2 = 0}_{\text{równanie ściany}}$$

Np. Przyjmując: $\psi = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta b$ $\quad f = b\alpha \quad g = \alpha^2$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 2(\alpha + \beta b) = 2\left[(1+b)x + (1-b)iy\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 2(\beta + \alpha b) = 2\left[(1+b)x - (1-b)iy\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = 4\left[(1+b)^2x^2 + (1-b)^2y^2\right] = 0$$ = równanie punktu O

Więc zawsze istnieje ściana, choć może degenerować w punkt

Równanie ściany pod przyjęciem $\psi = (\alpha f(\beta)$ ~~[f(\alpha) + f(\beta)]~~

$= \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) -$

$$\left[f(\beta) + \beta f'(\alpha) + g'(\alpha)\right]\left[f(\alpha) + \alpha f'(\beta) + g'(\beta)\right] = 0$$

$$f(\alpha) f(\beta) + \alpha\beta f'(\alpha) f'(\beta) + g'(\alpha) g'(\beta) + \alpha f(\beta) f'(\beta) + \beta f(\alpha) f'(\alpha)$$
$$+ f(\alpha) g'(\alpha) + f(\beta) g'(\beta)$$
$$+ \alpha f'(\beta) g'(\alpha) + \beta f'(\alpha) g'(\beta)$$

pod przyjęciem $g' = \alpha f'$

$$f(\alpha) f(\beta) + 2\alpha\beta f'(\alpha) f'(\beta) + \alpha f(\beta) f'(\beta) + \beta f(\alpha) f'(\alpha)$$
$$+ \alpha f(\alpha) f'(\alpha) + \beta f(\beta) f'(\beta)$$
$$+ \alpha^2 f'(\alpha) f'(\beta) + \beta^2 \cdot -$$

$$= f(\alpha) f(\beta) + (\alpha+\beta)^2 f'(\alpha) f'(\beta) + (\alpha+\beta)\left[f(\alpha) f'(\alpha) + f(\beta) f'(\beta)\right]$$

(Spróbować $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$)

asymptoty $u\ v\ w$ ∞ $\frac{1}{r}$

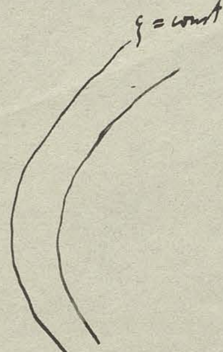
$f(z) = \log z$

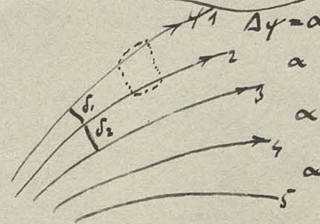
$\log z = \log r + i\theta$

~~$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha \log\beta - \beta \log\alpha + g(\alpha) - g(\beta)\right]$~~

~~$v = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + \log\beta - \log\alpha + g'(\alpha) - g'(\beta)\right] = \sin 2\theta \ldots \theta$~~

$u = \quad + \quad - \quad - \quad - \quad - \quad = \cos 2\theta - \log r + \ldots$





$\frac{1}{\delta_1} : \frac{1}{\delta_2} = V_1 : V_2$

$\xi = \dfrac{\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)_1 - \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)_2}{\delta}$

$$\iint (p\,\nabla^2\psi - \psi\,\nabla^2 p)\,dx\,dy = \int \left(p\,\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\,\frac{\partial p}{\partial n}\right) ds$$

if p everywhere finite, $\lim p = 0$: $\iint_0^\infty p\,\xi\,dx\,dy = 0$

$$\iint p\,\nabla^2\psi\,dx\,dy = \int p\,\frac{\partial\psi}{\partial n} - \iint \left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) dx\,dy$$

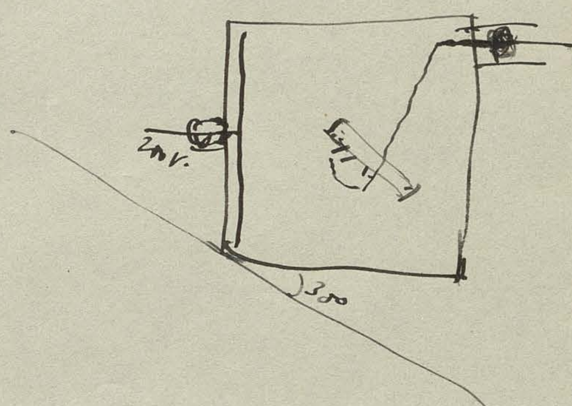
$$= \iint \left(v\,\frac{\partial p}{\partial x} - u\,\frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Sup. $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$

$$\psi = \alpha\beta\left(\frac{1}{1+\alpha^2} + \frac{1}{1+\beta^2}\right) + g(\alpha) + g(\beta)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{\beta}{1-\alpha^2} + \frac{\beta}{1-\beta^2} + \frac{2\alpha^2\beta}{(1-\alpha^2)^2} + g'(\alpha) = \frac{\beta}{1-\beta^2} + \frac{\beta(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} + g'(\alpha)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha}{1-\beta^2} + \frac{2\alpha\beta^2}{(1-\beta^2)^2} + g'(\beta)$$



$n = -1 \qquad R = m k r^{m}$

$$R^2 - 2R\left[-\cos(m+2)\theta - \cos(m-2)\theta\right] = -2 - 2\cos 4\theta$$

$$R^2 + 4R \cos m\theta \cos 2\theta = -4\cos^2 2\theta$$

$$R = -2\cos m\theta \cos 2\theta \pm \sqrt{4\cos^2 2\theta\,(\cos^2 m\theta - 1)}$$

Compl.

$n = -2 \qquad R = m k r^{m+1}$

$$R^2 + 2R\left[+2\cos(m+3)\theta + \cos(m-3)\theta\right] = -5 - 4\cos 6\theta$$

Czy istnieje ruch nieskończony (A i $\lim \psi = \infty$) z warunkiem $\lim u = \lim v = 0$, $\lim p = 0$ $\}\ \infty$

(ale w skończoności skończony)

$$\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta) = (\alpha+\beta)\left[f(\alpha) + f(\beta)\right] + g(\alpha) - \alpha f(\alpha) + g(\beta) - \beta f(\beta)$$

$$\psi \qquad = 4x\, R f(\alpha) + R\, \varphi(\alpha)$$

$$\xi = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 4(f'(\alpha) + f'(\beta)) = 8\, R f'(\alpha)$$

rzęd $f' < 1$

$$p = 8\, I f'(\alpha) = 4\, \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{i} = 8\, I f'(\alpha) = a + \frac{a_1}{\sqrt{z-\alpha_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{z-\alpha_2}} + \dots \frac{b_1}{(z-\alpha_1)^2} + \dots$$

$$u = i\left[2\left[f(\alpha) - f(\beta)\right] + (\alpha-\beta)\left[f'(\alpha) + f'(\beta)\right]\right]$$

$$v = (\beta-\alpha)\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right] \qquad v = y p$$

Jeżeli dla płaszczyzny XY ~~illegible~~ płaskiej (z przegrodą), to ~~illegible~~ p punkty osobliwe tylko w skończoności ± 1 (?)

$$f'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} \qquad f(\alpha) = \lg(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}) = a + ib$$

$$u = -4\,(b) - \frac{4y}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

czy może być rzęd $f' < -1$? $0 > f > -1$

$$v = -\frac{4y}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

Bsp. $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

$$\psi_1 = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + g(\alpha) - g(\beta)\right] \qquad \psi_2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + g(\alpha) + g(\beta)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha^2} + g'(\alpha) + \frac{1}{i}\left[\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha^2} + g'(\alpha)\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta^2} + g'(\beta) - \frac{1}{i}\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta^2} + g'(\beta)\right]$$

$$\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + \alpha g'(\alpha)\right]\left[\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} + \beta g'(\beta)\right] + \left[\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \alpha g'(\alpha)\right]\left[\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \beta g'(\beta)\right] +$$

$$+ \frac{1}{i}\left\{\left[\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \alpha g'(\alpha)\right]\left[\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} + \beta g'(\beta)\right] - \left[\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \beta g'(\beta)\right]\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} + \alpha g'(\alpha)\right]\right\} = 0$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 2\alpha\beta\, g'(\alpha)\, g'(\beta) + \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left[\alpha g'(\alpha) + \beta g'(\beta)\right] +$$

$$- \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)\left[-\alpha g'(\alpha) + \beta g'(\beta)\right]$$

$$+ \frac{1}{i}\left\{2\left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right) + g'(\alpha)\left(\beta - \frac{\alpha^2}{\beta}\right) + g'(\beta)\left(\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)\right.$$

$$\left(-\beta - \frac{\alpha^2}{\beta}\right) \qquad \left(-\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha}\right)$$

$$\left. -2 g'(\alpha)\frac{\alpha^2}{\beta} + 2 g'(\beta)\frac{\beta^2}{\alpha}\right\}$$

$$= 4 + 2\alpha\beta\, g'(\alpha)\, g'(\beta) + g'(\alpha)\left[2\beta\right] + g'(\beta)\left[2\alpha\right]$$

$$+ \frac{1}{i}\left\{2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + 2\frac{\beta^2}{\alpha} g'(\beta) - 2\frac{\alpha^2}{\beta} g'(\alpha)\right\}$$

$$-u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\alpha^2} + \sqrt{1+\beta^2}\right) = \sqrt{r_1 r_2}\,\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$v = \frac{1}{2i}\left(\quad - \quad \right)$$

$$\psi = \frac{1}{2i}\left[\beta\frac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\quad} + \alpha\sqrt{1+\beta^2}\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\log\left(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2}\right) \qquad \beta \left\| \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha}\log\ldots \right.$$

$$\psi = \frac{1}{2i}\left[\beta\frac{\log\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \alpha\frac{\log\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right] \quad \frac{1}{2i}\left[\beta\sqrt{1+\alpha^2}\log\alpha - \alpha\sqrt{1+\beta^2}\log\beta\right]$$

$$-u = \frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\beta\alpha\log\alpha}{\sqrt{\quad}^3}\right. \quad -u = \frac{1}{2}\left[\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2} + \ldots + \frac{\beta\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\log\alpha + \ldots \sqrt{1+\alpha^2}\log\alpha \ldots\right]$$

$$-u = \sqrt{r_1 r_2}\,\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\log r\cdot\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \theta\cdot\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$$

$$- \sqrt{r_1 r_2}\left[\log r\,\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \theta\,\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$$

$$\theta =$$

$\theta_1 = \pi;\ \theta = \theta_2 = 0$

$\theta_2 = 0;\ \theta = \theta_1 = \pi$

$$u = -4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\theta\,\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{4}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$v = 4\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\theta\,\sin\left(\quad \right) + \frac{(\theta-\pi)}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$\sqrt{(\beta+i\alpha)(\beta-i\alpha)}$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\sqrt{\beta^2+1} - \beta\sqrt{\alpha^2+1} + \text{[struck]}\right] \ldots -$$

$$-u = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\beta^2+1} + \sqrt{\alpha^2+1} \;\text{[struck]}\; + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{\beta^2+1}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+1}}\right]$$

$$\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$-2\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\sin\theta$$

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+1}}$$

$$= \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\cos\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right] + \frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$v = \frac{1}{2i}\left[\sqrt{\beta^2+1} - \sqrt{\alpha^2+1} + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{\beta^2+1}}\right]$$

$$-\sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} \;\text{[struck]}\; \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \;\text{[struck]}\; \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$\frac{-\alpha^2 \ldots}{\sqrt{\alpha^2+1}} = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[-\sin\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$$

$$-2\cos\theta\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$+r_1 r_2 + 1 = r^2\frac{\sin\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \quad ?$$

$$= r^2\left[\sin 2\theta \operatorname{ctg}\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \cos 2\theta\right]$$

$$r_1 r_2 - 1 = r^2\frac{\cos\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$$

$$= r^2\left[\cos 2\theta + \sin 2\theta \operatorname{tg}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$$

$\xcancel{\sin 2\theta\left[\operatorname{ctg} - \frac{1}{\operatorname{tg}}\right] = 2\cos 2\theta}$

$$r_1 r_2 = r^2\sin 2\theta\left[\operatorname{tg}\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right]$$

$$\frac{\beta^2}{2\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{2} = \frac{\beta^2 - 1 - \beta^2}{2\sqrt{1+\beta^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1+\beta^2}}$$

$$\frac{r^2}{2\sqrt{r_1 r_2}}\cos\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$-\sin \quad + \sin \quad \ldots \sin$$

$$-\frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}} + \sqrt{y^2-1} = -\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$-y^2 + y^2 - 1 = -1$$

$-\sqrt{y^2-1} - \frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}} + \frac{2y^2-1}{\sqrt{y^2-1}}$

$(2)-(1) = \qquad v = \mp 2\, r^2 \operatorname{arcth} \frac{2y}{1+y^2}$

$(6-5) = \qquad v = \pm y \lg(y^2-1) \qquad -u = -2y\pi$

$(3+4) = \qquad v = 2\sqrt{y^2-1}\, \lg(y+\sqrt{--}) \qquad u = 0$

$(4-3) = \qquad v = \frac{2y^2}{\sqrt{y^2-1}} \lg(y - -) + 2y \qquad u = -\pi \frac{2y^2-1}{\sqrt{y^2-1}}$

$\frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}} \lg \dots \quad + y \quad + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{y^2-1}} \lg \text{---} \quad + \frac{y}{2} \quad - \frac{y}{2} \lg(y^2-1) \quad - \frac{r^2}{2} \operatorname{arcth} \quad + (3y$

$\frac{4}{2} - \frac{3}{2} \qquad -\frac{3}{2} \qquad \frac{5}{2} - \frac{6}{2} \qquad \frac{2}{4} - \frac{1}{4}$

$-\frac{\pi}{2} \frac{2y^2-1}{\sqrt{y^2-1}} \qquad -\frac{\pi}{4} \frac{2y^2-1}{\sqrt{y^2-1}} \qquad y\pi \qquad 0$

$-\frac{3\pi}{4} \frac{2y^2-1}{\sqrt{y^2-1}} + y\pi$

$$\lg r\,(-2\sin\theta + \sout{2\sin 3\theta - 4\cos\theta\sin 2\theta} + 4\sin\theta)$$

$$-2\sin 2\theta\cos\theta + 2\cos 2\theta\sin\theta + 2\sin\theta$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{-2\sin\theta}$$

$$\lg r\,(2\cos\theta + \sout{2\cos 3\theta + 4\sin\theta\sin 2\theta} - 4\cos\theta)$$

$$\downarrow$$

$$2\cos 2\theta\cos\theta + 2\sin 2\theta\sin\theta - 2\sin\theta$$

$$\theta[\sout{-2\sin\theta - 2\sin 3\theta - 4\sin\theta\cos 2\theta - 4\sin\theta}]$$

$$\downarrow$$

$$-2\sin 2\theta\cos\theta - \underbrace{6\cos 2\theta\sin\theta - 6\sin\theta}$$

$$\downarrow$$

$$-4\sin\theta\cos^2\theta - 12\sin\theta\cos^2\theta = -16\sin\theta\cos^2\theta$$

$$\theta[\sout{2\sin\theta - 2\sin 3\theta - 4\sin\theta\cos 2\theta - 4\sin\theta}]$$

$$\theta[\sout{-2\cos\theta + 2\cos 3\theta + 4\cos\theta\cos 2\theta - 4\cos\theta}]$$

$$-6\cos\theta \quad 6\cos 2\theta\cos\theta - 2\sin 2\theta\sin\theta$$

$$-12\cos\theta\sin^2\theta \quad - 16\sin^2\theta\cos\theta$$

$$p = -\frac{3}{4\alpha\beta} + \frac{1}{24}\left(\frac{\alpha}{\beta^3} + \frac{\beta}{\alpha^3}\right) + \frac{1}{4}\left[\lg\alpha - \lg\beta\right]\left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right] - \frac{\pi}{4i}\left[\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-3}{\alpha\beta} + \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha}{\beta^3} + \frac{\beta}{\alpha^3}\right) + \left[\lg\alpha - \lg\beta\right]\left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right] + \frac{\pi}{i}\left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right]\right]$$

$$\Delta^2 u = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{\alpha^2\beta} + \frac{1}{\alpha\beta^2}\right) + \frac{8}{3}\left(\frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\alpha^3}\right) - \left(\frac{\alpha}{\beta^4} + \frac{\beta}{\alpha^4}\right) + \sout{\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}} - \right.$$

$$\left. -2\left(\frac{\lg\alpha}{\alpha^3} + \frac{\lg\beta}{\beta^3}\right) - \sout{\left(\frac{1}{\alpha\beta^2} + \frac{1}{\beta\alpha^2}\right)} + 2\left(\frac{\lg\alpha}{\beta^3} + \frac{\lg\beta}{\alpha^3}\right) - \frac{2\pi}{i}\left[\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3}\right]\right]$$

$$u = \frac{1}{16}\left\{-\left(\frac{\lg\alpha}{\beta} + \frac{\lg\beta}{\alpha}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\beta^2}{\alpha^3} + \frac{\alpha^2}{\beta^3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{\beta^2}\right) + \frac{\pi}{i}\left(\frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\alpha}{\beta^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{\beta^2}\right) + \left(\beta\frac{\lg\alpha}{\alpha^2} + \alpha\frac{\lg\beta}{\beta^2}\right) - \left(\frac{\alpha\lg\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta\lg\beta}{\alpha^2}\right) + \sout{\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2}}\right\}$$

höflichst zu bitten, da er

$$u = \frac{1}{8r}\left[\frac{\cos 3\theta + \cos 5\theta}{6} - 2\cos 3\theta \log r + 2\theta \sin\theta\right]$$

$$v = \frac{1}{8r}\left[\frac{-\sin 3\theta + \sin 5\theta}{6} - 2\sin 3\theta \log r + 2\theta\cos\theta + 3\sin\theta\right]$$

$\theta = 0$ $\quad u = \frac{1}{3} - 2\log r$ $v = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad u = \pi$ $v =$	$\theta = \pi$ $\quad u = -\frac{1}{3} + 2\log r$ $v = -2\pi$	1/1

$u = 2\sin\theta \ldots$

$v =$

$\theta = 0$ $\quad u = 1 + 2\log r$ $v = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad u = -\pi + \pi = 0$ $v = -2\log r - 1$	$\theta = \pi$ $\quad u = -2\log r - 1$ $v = 2\pi - 2\pi = 0$	2/1

$$u = -\frac{2\sin 2\theta \sin\theta}{r} + \frac{2\cos\theta}{r}$$

$\theta = 0$ $\quad u = 2$ $v = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad u = 0$ $v = -2$	$\theta = \pi$ $\quad u = -2$ $v = 0$	3/1

$$u = -\frac{2\cos 2\theta \sin\theta}{r} -$$

$\theta = 0$ $\quad u = 0$ $v = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad u = 0$ $v = 0$	$\theta = \pi$ $\quad u = 0$ $v = 0$	!

$$u = \frac{\cos\theta}{r} = \frac{x}{r^2} \qquad \theta = 0 \quad u = 1,\ v = 0 \qquad \theta = \pi \quad u = 1,\ v = 0$$

$$v = \frac{\sin\theta}{r} = \frac{y}{r^2}$$

(5)

$n=2$
$m=-1$ $\quad R = -k r^{-4}$

$$R^2 - 2R\left[2\cos 2\theta - 1\right] = -5 + 4\cos 2\theta$$

$$R = 2\cos 2\theta - 1 \pm \sqrt{4\cos^2 2\theta - \cancel{4\cos 2\theta} + 1 - 5 + \cancel{4\cos 2\theta}}$$

$$\sqrt{4(\cos^2 2\theta - 1)} \quad \text{Compl.}$$

$m=-2$ $\quad R = -2 k r^{-5}$

$$R^2 - 2R\left[2\cos 3\theta - \cos\theta\right] = -5 + 4\cos 2\theta$$

$$R = 2(\cos 3\theta - \cos\theta) + \cos\theta$$

$$= -4\sin 2\theta \sin\theta + \cos\theta \pm \sqrt{}$$

$$= \cancel{2\cos 2\theta}$$

$$R^2 - 2R\left[\nu\cos(\nu-m)\theta + 2\sin\nu\theta\sin m\theta\right] = -\nu^2 - 4n\sin^2\nu\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \mp \delta$$

$$\sin(\alpha\theta) = \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2} \mp \alpha\delta\right) = \sin\frac{\alpha\pi}{2}\cos\alpha\delta \mp \cos\frac{\alpha\pi}{2}\sin\alpha\delta$$

$\alpha = 2p$
$\sin\alpha\theta = \alpha\delta . (-1)^{p}$

$\nu - m = 2(\mu - p)$

$$\cos(\nu-m)\theta = \cos(\nu-m)\frac{\pi}{2}\cos(\nu-m)\delta + \sin(\nu-m)\frac{\pi}{2}\sin(\nu-m)\delta = (-1)^{\mu-q+1}\left(1 - \frac{(\nu-m)^2\delta^2}{2}\right)$$

$$R^2 - 2R\left[(-1)^{\mu-q+1}\nu\left(1 - \frac{(\nu-m)^2\delta^2}{2}\right) + 2\nu\mu\delta^2(-1)^{\mu+q}\right] = -\nu^2 - 4n\nu^2\delta^2$$

$\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta)$

Sup. $f(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha}$

$\psi = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) g(\alpha) + \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) g(\beta) \quad = \alpha \left[\frac{g(\alpha)}{\alpha} + \frac{g(\beta)}{\beta}\right]$

$\psi = \frac{\alpha}{\beta^2 - 1} + \frac{\beta}{\alpha^2 - 1} + \cdots$

$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 - 1}$

$f'(\alpha) = -\frac{2\alpha}{(\alpha^2 - 1)^2}$

$u = f(\beta) + f(\alpha) + \beta f'(\alpha) + \alpha f'(\beta) + g'(\alpha) + g'(\beta)$

$= \frac{1}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{\beta^2 - 1} + - \frac{4\alpha\beta}{(\alpha^2 - 1)^2} + \cdots +$

$= \frac{1}{r_1 r_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) - \frac{4 r^2}{(r_1 r_2)^2} \cos 2(\theta_1 + \theta_2)$

$\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \frac{f'(\alpha)}{i} - \frac{f'(\beta)}{i} = \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = i \left(f'(\alpha) - f'(\beta)\right)$

$f = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \qquad f' = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}^{\,3}}$

$u = y \left(\frac{r}{(r_1 r_2)^3} \sin\left[\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right]\right.$

$v = + \frac{1}{r_1 r_2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - y \frac{r}{(r_1 r_2)^3} \cos\left[\theta - \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right]$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} \qquad \psi = \alpha\beta\left(\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\beta^2}\right) + g(\alpha) + g(\beta)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{\beta}{1-\beta^2} + \beta\frac{(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2} + g'(\alpha) = \frac{k\alpha}{1-\alpha^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{\alpha}{1-\alpha^2} + \alpha\frac{(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^2} + g'(\beta)$$

$$\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} + \alpha\beta\frac{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}{(1-\alpha^2)^2(1-\beta^2)^2} + k^2 \cdot \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}$$

$$\psi = \frac{1}{i}\Big[$$

$\varphi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha)$ $\qquad p = \frac{f'(\alpha) + f'(\beta)}{i}$

$u = \frac{1}{i}\left[f(\beta) - f(\alpha) + \beta f'(\alpha) - \alpha f'(\beta)\right]$ $\qquad u = Rf \quad If$

$v = \left[f(\beta) + f(\alpha) + \beta f'(\alpha) + \alpha f'(\beta)\right]$ $\qquad v = -If \quad Rf$

$f' = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ $\qquad u = \frac{-r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$ | pot. $\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ $\quad \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

$v = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$ | $\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

$u = \frac{-r}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \sin\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right] = 2\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\sin\theta \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right.$ | +

b

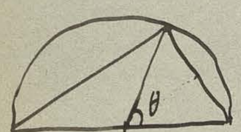
$v = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\cos \quad + \cos \quad\right] = 2\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

a

$u = \frac{1}{i}\left[\frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]$

$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}^3} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]$

$\frac{\partial u}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}^3} - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^3}\right]$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}^3} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^3}$



$r_1 = 2r \sin\frac{\theta}{2} = 2r \cos\theta_1$

$\frac{1}{\sqrt{\cos\theta_1 \cos\theta_2}} = \frac{1}{\sqrt{\cos\theta_1 \cos\theta_1}}$

$$\lg \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = a + ib \qquad \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = e^a(\cos b + i \sin b) = \frac{1+x+iy}{1-x-iy} = \frac{(1+x+iy)(1-x+iy)}{(1-x)^2+y^2}$$

$$= \lg \frac{r_2 e^{i\theta_2}}{r_1 e^{i\theta_1}} = \lg \frac{r_2}{r_1} + i(\theta_2 - \theta_1) + i\,\mathrm{cost}$$

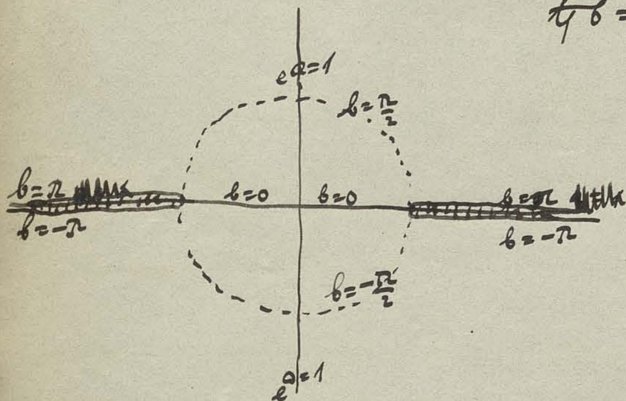
$$= \frac{1-x^2-y^2 + 2iy}{1-2x+x^2+y^2}$$

$$e^a \cos b = \frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2}$$

$$e^a \sin b = \frac{2y}{\cdots\cdots}$$

$$\Bigg\} \quad e^a = \frac{\sqrt{(1-x^2-y^2)^2+4y^2}}{(1-x)^2+y^2}$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{2y}{1-x^2-y^2} = \frac{2y}{1-r^2}$$



$$\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha}} = \frac{r}{\sqrt{r_1}}\left[\cos\left(\theta - \frac{\theta_1}{2}\right) + i \sin\left(\theta - \frac{\theta_1}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}^3} = \frac{1}{\sqrt{r_1}}\left(\cos\frac{\theta_1}{2} - \sin\frac{\theta_1}{2}\right) + \frac{r}{2\sqrt{r_1}^3}\left[\cos\left(\theta - \frac{3\theta_1}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{3\theta_1}{2}\right)\right]$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \sqrt{\frac{r}{r_1}}\left[\cos\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta-\theta_1}{2}\right)\right]$$

$$\sqrt{\alpha(1-\alpha)} = \sqrt{r r_1}\left[\cos\frac{\theta+\theta_1}{2} + i \sin\frac{\theta+\theta_1}{2}\right]$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{r_1}{r}}\left[\cos\left(\frac{\theta_1-\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_1-\theta}{2}\right)\right] - \sqrt{\frac{r}{r_1}}\left[\cos\left(\frac{\theta_1-\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta_1-\theta}{2}\right)\right]\right\}$$

$$\alpha\sqrt{1-\alpha} = r\sqrt{r_1}\left[\cos\left(\theta+\frac{\theta_1}{2}\right) + i\sin\left(\theta+\frac{\theta_1}{2}\right)\right]$$

$$\sqrt{1-\alpha} - \frac{\alpha}{2\sqrt{1-\alpha}} = \sqrt{r_1}\left[\cos\frac{\theta_1}{2} + i\sin\frac{\theta_1}{2}\right] - \frac{r}{2\sqrt{r_1}}\left[\cos\left(\theta - \frac{\theta_1}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\theta_1}{2}\right)\right]$$

$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^3$

$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$

$-2\sin^3\frac{\theta}{2}$

$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}) = (\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\alpha-\beta)$

$(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)$

$-\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}$

$\cos = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$a\left(1+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)+\frac{ab^2}{a^2+b^2} = a\frac{2a^2+b^2+b^2}{a^2+b^2} = 2a$

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{4}{5}$

$a\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{a^2+b^2} = b$

$\sin\theta = \frac{3}{5}$

$\frac{v}{u} = \frac{b}{2a}$

$\frac{1-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}}{3+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}} = \frac{[illegible]}{8}$

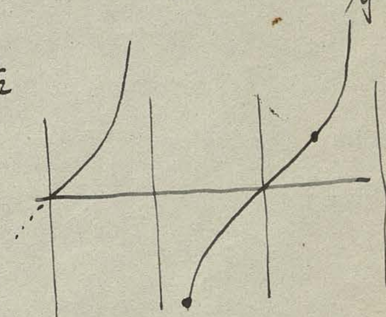
$tg\,\theta = \frac{3}{4}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{b}{2\sqrt{2}} = \frac{3a-b}{2\sqrt{2}}$

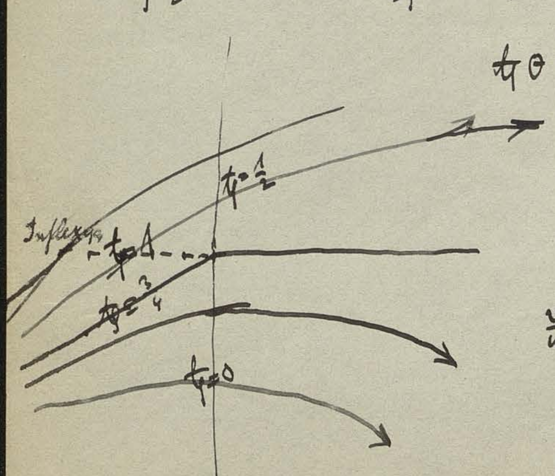
$-\frac{a}{2\sqrt{2}}+\frac{b}{2\sqrt{2}}$



$tg\frac{\theta}{2} = -3$

$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$tg\,\theta = \frac{-6}{1-9} = \frac{3}{4}$



$\left(a\cos\frac{\theta}{2}+b\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}$

$\frac{v}{u} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{1+\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\frac{1-\cos\theta}{2}+\frac{\sin\theta}{2}}{1+\frac{\sin\theta}{2}+\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$= \frac{1-\cos\theta+\sin\theta}{3+\cos\theta+\sin\theta} = \frac{(2+\sin\theta)-(1+\cos\theta)}{(2+\cos\theta)+(1+\sin\theta)}$

$1+3\cos^2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $b^2\sin^2$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}\left\{a^2\left(1+2\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^4\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+b^2\left(\sin^4\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right.$$

$$\left.+2ab\left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,2\,(1+\cos^2)+\sin^2\cos\right)\right\}$$

$$u^2+v^2=\sin^2\frac{\theta}{2}\left\{a^2\left(1+3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+4ab\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+b^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}$$

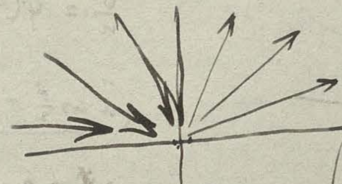
$$u = -\frac{4r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^4}\right)\right] - 4\sqrt{r_1 r_2}\cos\left(\theta - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}\right)$$

$$u = -4r\sin\theta\left[2 - \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{2r^4}\right] + 4\frac{\cos\theta\cos^2\theta}{r}$$

$$v = 4r\cos\theta \frac{\cos\theta\cos\theta}{r^2} = \frac{4\sin^2\theta\cos\theta}{r}$$

$$u = \frac{4\cos\theta\cos\theta}{r} = \frac{x^2 y}{r^4}$$

$$v = \frac{4\sin^2\theta\cos\theta}{r} = \frac{xy^2}{r^4}$$



$\int 3\pi$:

$$u = \frac{xy^2}{r^4}$$

$$v = \frac{y^3}{r^4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{4xy^3}{r^6} + \frac{4xy^3}{r^6} - \frac{2xy}{r^4}$$

$$\lim_{r=0} \zeta = 0$$

$$u = \frac{y^2}{r^4} - \frac{4x^2y^2}{r^6}$$

$$v = -\frac{4xy^3}{r^6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2}{r^4} - \frac{x^2}{r^4} - \frac{4xy}{r^6} + \frac{4x^2y^2}{r^6}$$

$$= -\frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

$$4c^2\int_0^\varphi \frac{\sin^2\theta}{x}\, x\, d\varphi = c^2\int(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= c^2(2\theta - \sin 2\theta)$$

$$= c^2\left[(\pi - 2\varphi) - \sin(\pi - 2\varphi)\right]$$

$$= c^2(\pi - 2\varphi - \sin 2\varphi)$$

$$u = -4\sqrt{1-x^2}$$

$$\int_0^1 u\,dx = -4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi = -\pi$$

$u = \sqrt{r}\left[a \sin^2\frac{\theta}{2}\left(1+\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + b \sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$

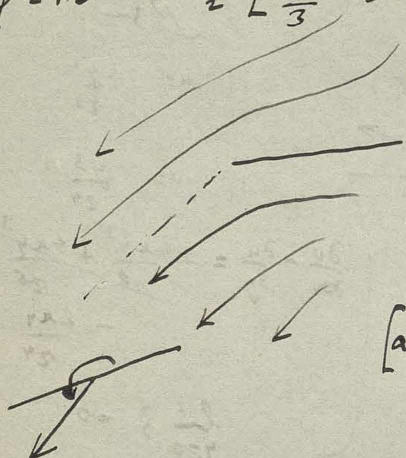
$a\left(1+\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + b \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

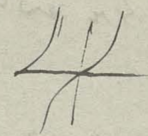
$v = \sqrt{r}\left[a \sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + b \sin^3\frac{\theta}{2}\right]$

$a \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + b \sin^2\frac{\theta}{2}$

$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}$

$\psi = \sqrt{r}^3 \sin\frac{\theta}{2}\left[\frac{b}{3}\sin\frac{\theta}{2} + a\cos\frac{\theta}{2}\right]$





$\frac{v}{u} = \operatorname{tg}(\theta - \pi) = \operatorname{tg}\theta$

$\frac{\left(a\cos\frac{\theta}{2} + b\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}}{a + \left(a\cos\frac{\theta}{2} + b\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\theta}$

$\left[a\cos\frac{\theta}{2} + b\sin\frac{\theta}{2}\right]\underbrace{\left[\cos\theta - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right]}_{-1} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$

$b\sin\frac{\theta}{2} = -3a\cos\frac{\theta}{2}$

$a\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - b = -\frac{b}{3} - b$

$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = -\frac{3a}{b}$

$\sin^2\frac{\theta}{2}$

$\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{r(1-\cos\theta)}{2}}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(y\sqrt{r-x}\right) = \frac{y(\cos\theta - 1)}{\sqrt{r-x}} = \frac{-\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$\sqrt{r-x} + \frac{y^2}{2r\sqrt{r-x}} = \sin\frac{\theta}{2} + \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

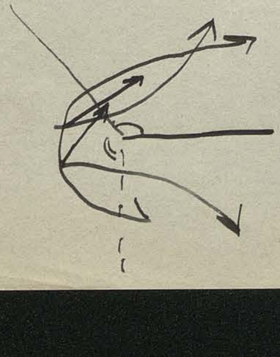
$\left(\sqrt{r-x}\right)^3$

$\frac{3}{2}\sqrt{r-x}\cdot\frac{\frac{x}{r}-1}{\frac{y}{r}}$

$\frac{\sin\frac{\theta}{2}(\cos\theta - 1)}{\sin\theta}$

$\sin^3\frac{\theta}{2}$

$\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$



$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = -\frac{a}{b}$

$v = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}$ $\qquad u = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)$

$= f(\alpha) + f(\beta) + \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha)$ $\quad \Big\| \quad \frac{1}{i}\left[f(\beta) - f(\alpha) + \beta f'(\alpha) - \alpha f'(\beta)\right]$

$g'(\alpha) + g'(\beta)$ $\qquad - \qquad \frac{1}{i}\left(g'(\alpha) - g'(\beta)\right)$

$f(\alpha) + \alpha f'(\beta)$ unst. $\qquad \frac{f(x+iy)}{x+iy} + f'(x-iy)$

$f(\beta) + \beta f'(\alpha)$ unst.

$f'(x) = -\frac{f(x)}{x}$

$\alpha f'(\beta) + \beta f(\alpha) = xM + yN = r\left[M\cos\theta - N\sin\theta\right]$

$x f'(x) + f(x) = 0$

$\underbrace{}_{\frac{d}{dx}[x f(x)]}$

$f(\alpha) = M + iN$

$x f(x) = c$

$f(x) = \frac{c}{x}$

$u = -\left\{\frac{\left(\sqrt{\alpha^2 - c^2} - \sqrt{\beta^2 - c^2}\right)}{i}\right\} - y\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - c^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - c^2}}\right)$

$\frac{\alpha}{\beta}$

$= -\sqrt{r_1 r_2}\,\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - y\,\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}\,\sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$

$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}$

$-\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{c^2 \sin\theta\cos\theta}{r^2} = -\frac{c^2 \sin\theta\cos\theta}{r^2}$ $\qquad \frac{\sin 2\theta}{r^2}$

$\psi = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2\cos 2\theta$

$u = .$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} c^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta = c^2 \frac{\sin^2\theta}{2} =$

$$\frac{x^2}{\lambda^2-1} + \frac{z^2}{\lambda^2} = h^2 \qquad \frac{x^2\lambda^2 + z^2\lambda^2 - z^2}{h^2} = (\lambda^4 - \lambda^2)$$

$$\lambda^4 - \lambda^2\left(1 + \frac{x^2+z^2}{h^2}\right) + \frac{z^2}{h^2} = 0$$

$$\begin{matrix} p \\ \rho \end{matrix} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2+z^2}{h^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{x^2+z^2}{h^2}\right) - \frac{z^2}{h^2}}$$

$$p_1^2 \rho_1^2 = \frac{z^2}{h^2} \qquad \underline{\underline{z = h p \rho}}$$

$$p^2 + \rho^2 = 1 + \frac{x^2+z^2}{h^2} = 1 + \frac{x^2}{h^2} + p^2\rho^2$$

$$x = h\sqrt{p^2+\rho^2-1-p^2\rho^2} = ih\sqrt{(1-p^2)(1-\rho^2)}$$

$$h^2(\lambda^2-1) = a^2$$

$$\underline{h^2\lambda^2 = -b^2}$$

$$\underbrace{-h^2}_{=c^2} = a^2 + b^2$$

$$\lambda = \frac{b}{c} = \rho$$

$$x = c + \xi = ih + \xi$$

$$x^2 = -h^2 + 2ih\xi + \xi^2$$

$$x^2 = c^2 + 2c\xi + \xi^2$$

$$\begin{matrix} p^2 \\ \rho^2 \end{matrix} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{c^2+2c\xi+\xi^2+z^2}{c^2}\right] \pm \sqrt{\cdots\cdots}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 + \frac{2\xi}{c} + \frac{\xi^2+z^2}{c^2}\right)\right] \pm$$

$$\begin{matrix} p^2 \\ \rho^2 \end{matrix} = -\left(\frac{\xi}{c} + \frac{r^2}{2c^2}\right) \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\xi}{c} + \frac{r^2}{2c^2}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2}}}_{=\sqrt{\frac{z^2}{c^2} + \frac{\xi r^2}{c^3} + \frac{r^4}{4c^4}}}$$

$$\begin{matrix} p^2 \\ \rho^2 \end{matrix} = -\frac{\xi}{c} \pm \frac{r}{c}$$

$$p^2 = r - \xi$$

$q = 1$ dla środka stron

$$\rho^2 = \left[1 + \frac{\xi}{h} + \frac{\xi^2+z^2}{2h^2}\right]\left\{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\frac{z^2}{h^2}}{1+\ldots}\right)^2}\right\}$$

$$\psi = (r - r\cos\theta)^{3/2} = h^2 \rho^3$$

$$\sqrt{r - r\cos\theta} = \rho\, h^{2/3}$$

$$\rho^2 = \frac{r - r\cos\theta}{h^{4/3}}$$

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - 1} + \frac{z^2}{\lambda^2} = -c^2$$

$$x^2\lambda^2 + z^2\lambda^2 - z^2 = -c^2\lambda^2(\lambda^2-1)$$

$$\lambda^4 + \lambda^2\left(\frac{x^2+z^2-c^2}{c^2}\right) = \frac{z^2}{c^2}$$

$$\rho^2 = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{x^2+z^2}{c^2}\right)\left[1 \pm (1 \cdot\cdot + \cdot)\right]$$

$$x = c + \xi$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 + 1 + \frac{2\xi}{c} + \frac{\xi^2+z^2}{c^2}\right)\left[1 \pm \sqrt{\cdots}\right]$$

$$= \left[\frac{\xi}{c} + \frac{\xi^2+z^2}{2c^2}\right]\left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{\xi}{c} + \frac{\xi^2+z^2}{2c^2}}\right)^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\xi}{c} + \frac{\xi^2+z^2}{2c^2}\right]\frac{z^4}{\xi^2 + \frac{(\xi^2+z^2)\xi}{c} + \cdot}$$

$$\rho^2 = -\frac{z^4}{c^3\xi}$$

$$\rho^2 = \frac{h^2+x^2+z^2}{2h^2} \pm \sqrt{(\quad)^2 - \frac{z^4}{h^4}}$$

$$x = h\sqrt{\lambda^2-1} + \xi$$

$$x^2 =$$

$$\omega^2 = -h^2(1-\rho^2)\left(1 - \frac{z^2}{h^2\rho^2}\right) =$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \zeta + \frac{\alpha(H''-S''\alpha) - \beta(H''-S''\beta)}{i} - i\,\frac{\alpha(H''-S''\alpha) - \beta(H''-S''\beta)}{}$$

$$-\left[\frac{f'(\alpha) - f'(\beta)}{i}\right] - i\left[f'(\alpha) - f'(\beta)\right].$$

(struck through)

$$H'-S'\alpha = \frac{\xi - i\zeta}{4}$$

$$H''-S''\alpha = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x} - i\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]$$

$$H''-S''\beta = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial\xi}{\partial x} + i\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]$$

$$\frac{1}{2i}\left\{(x+iy)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} - i\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) - (x-iy)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + i\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\right\}$$

(struck through line)

$$+\frac{x}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2}\left[y\frac{\partial\xi}{\partial x} - x\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right]$$

$$+\frac{x}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

$$z = \frac{e^{X'} - e^{-X'}}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\alpha^2} + \sqrt{1+\beta^2}\right) \qquad \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \qquad 1 = X''\left(\frac{e^{X'} + e^{-X'}}{2}\right)$$

$$\overbrace{H''-S''}^{X''} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \qquad X'' = \frac{1}{\frac{e^{X'}+e^{-X'}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2X'}+e^{-2X'}+2}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\sin h\varphi}{y\cos h\varphi} = \frac{1}{\cos h\varphi\,\sin h\varphi}$$

$$-\left[\frac{2x^2\sin h\varphi}{\cos^3 h\varphi} + \frac{2y^2}{\sin^3 h\varphi}\cos h\varphi\right]\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{2y}{\sin^2 h\varphi} = 0 \qquad x=0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x^2}{(\cos h\varphi)^2} + \frac{y^2}{(\sin h\varphi)^2} = 1 = \frac{x^2}{\sin^2 h\varphi + 1} + \frac{y^2}{\sin^2 h\varphi}$$

70

$$\int \underline{\arcsin \frac{x}{i}\, d\frac{x}{i}} = x \arcsin \frac{x}{i} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \underline{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}}$$

$=$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin - \frac{x}{\sqrt{}}$$

$$4(H-G)^{(2)} = (x+iy) \arcsin \frac{x+iy}{i} + i\sqrt{1-\left(\frac{x+iy}{i}\right)^2}$$

$$\frac{z}{i} \arcsin \frac{z}{i} + \sqrt{1 + \frac{z^2}{}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{i} \arcsin \frac{z}{i} + \frac{z}{i^2}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$= (x+iy)(\xi + i\mu) + i\sqrt{1+x^2-y^2+2ixy}$$

$$= x\xi - y\mu + i(\mu x + \xi y) + \underbrace{\quad}_{Re^{i\theta}} \qquad \sqrt{R}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$R\cos\theta = 1+x^2-y^2 \qquad \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$4R(H-G) = x\xi - y\mu - \sqrt{\frac{\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} - 1 - x^2 + y^2}{2}} \qquad R\sin\theta = 2xy$$

$$\underbrace{\quad}_{y=0} = 0$$

N. p. $G = +3H$

$$v\Big|_{y=0} = \frac{x\xi}{4} - \frac{x\xi}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+x^2 - \ldots)^2 + 4xy \ldots} - (x^2 + y^2)\right]}$$

$=0$

$=\sqrt{\quad}$

191.6
1146
71

$x+iy = i\sin(\xi+i\eta)$

$= \dfrac{e^{i\xi-\eta} - e^{-i\xi+\eta}}{2}$

$= \dfrac{e^{-\eta}(\cos\xi + i\sin\xi) - e^{\eta}(\cos\xi - i\sin\xi)}{2}$

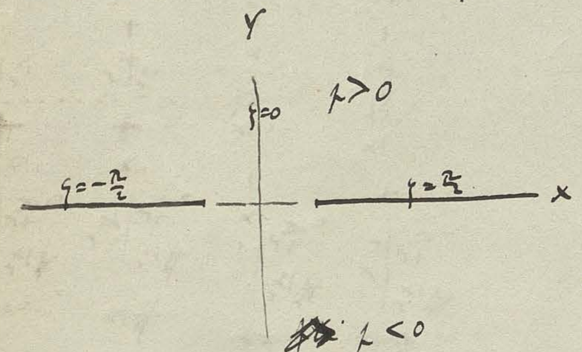
$= i\cos\xi\,\dfrac{e^{-\eta}-e^{\eta}}{2} - i\sin\xi\,\dfrac{e^{-\eta}+e^{\eta}}{2}$

$y = \sinh\eta\cos\xi$

$x = \cosh\eta\sin\xi$

$$\frac{x^2}{\sin^2 h\eta} + \frac{y^2}{\cos^2 h\eta} = 1$$

$$\frac{y^2}{\sin^2\xi} - \frac{x^2}{\cos^2\xi} = 1$$



$\xi + i\eta = \arcsin\dfrac{x+iy}{i}$

$= 4(H'-S')(x+iy)$

$4(H'-S')x = \arcsin\dfrac{x}{i}$

$z = re^{i\theta}$

$4(H'-S')(x+iy) = \arcsin\dfrac{x+iy}{i}$

$= \arcsin\dfrac{x}{i}$

$y=0 \qquad u=0$

$v = x\,R(H'-S')\Big|_{y=0} + 2RH\Big|_{y=0}$

$x+iy = i\sin 4(H'-S') = i\sin[4RH'-S' + i\,4JH'-S']$

$= \dfrac{e^{i4(H'-S')} - e^{-i4(H'-S')}}{2}$

$= \dfrac{e^{4iR(H'-S') - 4J(H'-S')} - e^{-4iR(H'-S') + 4J(H'-S')}}{2}$

$\arcsin\left(\dfrac{x}{i}+y\right) = R + iJ$

$\dfrac{x}{i} = \sin(R+iJ)$

$x+iy =$

$x = -\cosh J\sin R$

$y = -\sinh J\cos R$

$$\frac{y^2}{\sin^2 R} - \frac{x^2}{\cos^2 R} = 1$$

$R(H'-S') = \dfrac{\xi}{4}$

$v = \dfrac{x}{4}\xi + 2RH\Big|_{y=0}$

$(x+iy)(\eta+i\theta)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = -\log r - \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{y^2+\frac{x^2}{\ldots}}$$

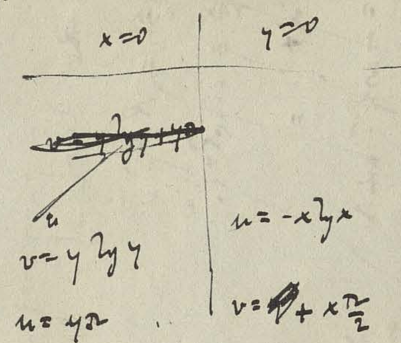
$$+\log r + \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{y^2+\frac{x^2}{\ldots}}$$

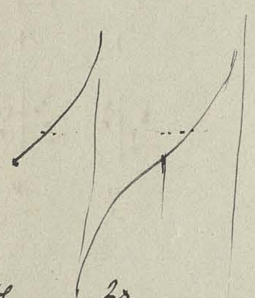
$$\log r + \frac{x^2}{r^2} +$$

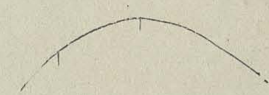
$$-\log r - \frac{y^2}{r^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{yx}{r^2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} - \frac{xy}{y^2+\frac{x^2}{\ldots}} - \frac{\pi}{2}$$

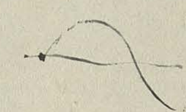
$$-\left[-\frac{xy}{r^2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + \frac{yx}{y^2+\frac{x^2}{\ldots}}\right] + \pi = 0$$







$z^2 = x^2 + y^2 + 2ixy$



$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $2x$

$v =$ $2y$

$$\nabla^2 \frac{\partial x}{\partial y} + \ldots \left(1+\frac{\ldots}{\ldots}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial y} + \ldots$$

$$\frac{1}{1+z^2} + \frac{x}{1+z^2} - \frac{2z^2}{(1+z^2)^2}$$

$\sin\theta\cos\theta = \ldots$

$y = \frac{\sin 2\rho}{\cos 2\rho - 1}$

$x = \ldots$

$x = \frac{0}{\cos 2\rho + 1}$

$y = \frac{\sin 2\rho}{\cos 2\rho + 1} = \frac{2\sin\rho\cos\rho}{2\cos^2\rho} = \operatorname{tg}\rho$ < 1 $\rho = \infty$

$y = \frac{e^{\rho} + e^{-\rho}}{e^{\rho} - e^{-\rho}}$ $\rho = \infty$

$y_x = \frac{\sin 2\rho}{\sin 2\alpha}$

$\frac{\sin 2\rho}{\cos 2\rho \tan 2\alpha} > 1$

$\sin 2\rho > \cos 2\rho \tan 2\alpha$

$2\sin\rho\cos\rho - 2\sin^2\rho \ldots > \ldots 2\alpha$

$\ldots > \ldots 2\alpha$

$$\frac{a e^{-\alpha x}}{x} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{b e^{-\alpha(l-x)}}{l-x} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{l-x}{\lambda}\right) = \sin 2\pi\frac{t}{\tau}\left(a e^{-\alpha x} \cos\frac{x}{\lambda} + b \cos\frac{l-x}{\lambda}\right)$$

$$- \cos 2\pi\frac{t}{\tau}\left(a \sin\frac{x}{\lambda} + b \sin\frac{l-x}{\lambda}\right)$$

$$J^2 = \left[\frac{a e^{-\alpha x}}{x} \cos\frac{x}{\lambda} + \frac{b}{l-x} e^{-\alpha(l-x)} \cos\frac{l-x}{\lambda}\right]^2 + \left[a e^{-\alpha x} \sin\frac{x}{\lambda} + b e^{-\alpha(l-x)} \sin\frac{l-x}{\lambda}\right]^2 =$$

$$= a^2 e^{-2\alpha x} + b^2 e^{-2\alpha(l-x)} + 2ab\, e^{-\alpha l}\underbrace{\left(\cos\frac{x}{\lambda}\cos\frac{l-x}{\lambda} + \sin\frac{x}{\lambda}\sin\frac{l-x}{\lambda}\right)}_{\cos\frac{2x-l}{\lambda}}$$

w punktach gdzie $\cos\frac{2x-l}{\lambda} = \pm 1$

$$J^2 = \left[\frac{a}{x} e^{-\alpha x} \pm \frac{b}{l-x} e^{-\alpha(l-x)}\right]^2$$

Zero dla $\quad \frac{a e^{-\alpha r_1}}{r_1} = \frac{b}{r_2} e^{-\alpha r_2}$

$$\frac{a}{b} = \frac{r_1}{r_2} e^{-\alpha(r_2 - r_1)}$$

$$\log\frac{a}{b} = \log r_1 - \log r_2 - \alpha \log(r_2 - r_1)$$

$$= \log r_3 - \log r_4 - \alpha \log(r_4 - r_3)$$

$$\alpha = \frac{\log r_1 - \log r_2 - \log r_3 + \log r_4}{\log(r_2 - r_1) - \log(r_4 - r_3)}$$

$$= \frac{\log\frac{r_1 r_4}{r_2 r_3}}{\log\frac{r_2 - r_1}{r_4 - r_3}}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{k}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{3\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -k\rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{4\mu}{3} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}$$

$$+\rho_0 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = +k\rho_0 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{4\mu}{3} \frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^2 \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{k\rho_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{4\mu}{3\rho_0} \frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^2 \partial t}$$

a^2

$$\sigma = e^{i(\alpha t - \beta x)}$$

$$-\alpha^2 = -a^2\beta^2 + i\frac{4\mu}{3\rho_0}\alpha\beta^2$$

$$\beta = \nu + i\kappa$$

$$+\alpha^2 = +a^2[\nu^2 - \kappa^2] + \frac{8\mu}{3\rho_0}\alpha\nu\kappa$$

$$0 = -2a^2\nu\kappa + \frac{4\mu}{3\rho_0}\alpha(\nu^2 - \kappa^2)$$

$$\alpha^2 = a^2(\nu^2 - \kappa^2) + \frac{8\mu}{3\rho_0}\alpha \frac{4\mu}{3\rho_0} \frac{\alpha(\nu^2 - \kappa^2)}{2a^2}$$

$$\cos\frac{2\alpha}{3} \qquad \sin 2\alpha$$

$$-2\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \frac{4}{3}\sin\frac{3\theta}{2}$$

$$= \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} + \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

$$-\frac{10}{3}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \frac{4}{3}\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

$$-\frac{20}{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{4}{3}\ldots + \frac{4}{3}\sin^3\frac{\theta}{2}$$

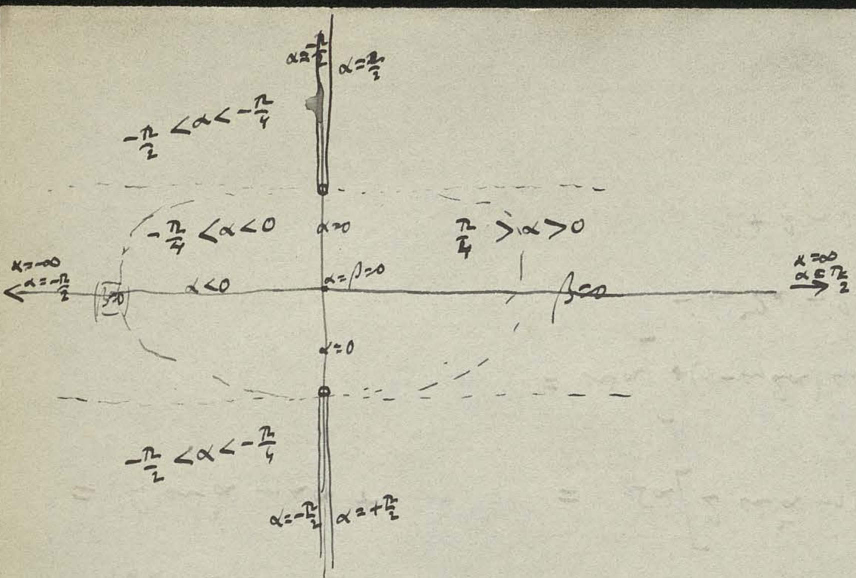
$$= \frac{4}{3}\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin^2\frac{\theta}{2} - 6\cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} - 2\cos\frac{3\theta}{2}$$

$$\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} - \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

$$= 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1}{z+1} \qquad \frac{2}{(z+1)^2}$$

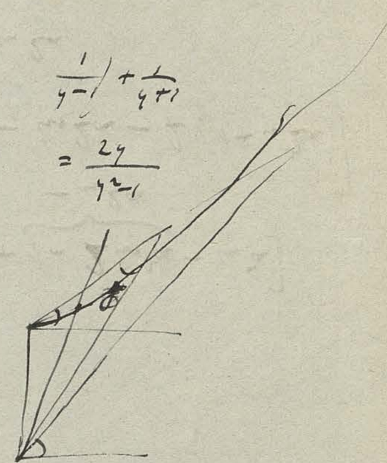


$$1-y-1-y$$

$$-\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} = \frac{-2y}{1-y^2}$$

$$\frac{1}{y-1} + \frac{1}{y+1}$$

$$= \frac{2y}{y^2-1}$$



$\theta_1 - \theta_2 = \beta$

$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

$x = 0$		$y = 0$
$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$	$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$	
$u = +\frac{2y}{y^2-1} - \beta - \frac{y}{y^2-1}$ $v = \frac{\pi}{2}$	$u = -\beta$ ($\frac{-2y}{y^2-1}$) $v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$	$u = 0$ $v = \frac{2x\cos 2\theta}{r_1 r_2} + \operatorname{arctg} x - \frac{\cos\theta}{r_1}$ $= \frac{2x^3}{(x^2+1)^2} \qquad \frac{x}{x^2+1}$

$y = 0$

$u = 0$

$v =$

$$\frac{2x^3}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{x^2+1} = -\frac{2}{(x^2+1)^2}$$

$$\overline{(2+i)^2} \quad \overline{(2-i)^2}$$

$$\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1} \quad \frac{y-1-y-1}{y^2-1}$$

$$\frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$u = \sqrt{r}\,\sin\frac{\theta}{2}\,(3+\cos\theta)$$

$$v = \sqrt{r}\,\sin\frac{\theta}{2}\,\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\,\frac{x}{r}\,\sin\frac{\theta}{2}(3+\cos\theta) - \frac{1}{2\sqrt{r}}\left[\cos\frac{\theta}{2}(3+\cos\theta) - 2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right]\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big\{3\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} - 3\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta - \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\sin\theta + \ldots\Big\}$$

$$+ \underbrace{\sin\theta\,\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}_{\frac{3}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin^2\theta} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta - \sin^3\frac{\theta}{2}\cos\theta$$

$$- 2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$- 3\sin^3\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + 5\sin^3\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \ldots +$$

$$+ \ldots - \ldots + \sin^5\frac{\theta}{2}$$

$$= -2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 3\sin\alpha\cos^2\alpha + 4\sin^3\alpha\cos^2\alpha$$

$$= 2\sin^3\alpha\,[1 - 2\cos^2\alpha] + \sin\alpha - 3\sin\alpha\cos^2\alpha$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

$$= 2\sin^3\alpha\cos 2\alpha + \ldots \qquad = \sin\alpha\Big[2\sin^2\alpha\cos 2\alpha + \underbrace{1 - 2\cos^2\alpha}_{-\cos 2\alpha} - \cos^2\alpha\Big]$$

$$= \sin\alpha\Big[+(1-\cos 2\alpha)\cos 2\alpha - \cos 2\alpha - 2(1+\cos 2\alpha)\Big]$$

$$-\cos^2 2\alpha - 2 - 2\cos 2\alpha$$

$$2 + 2\cos\beta - \cos^2\beta = 3 - (1-\cos\beta)^2$$

$$u = \sqrt{r}\,\sin\tfrac{\theta}{2}\,[3+\cos\theta] = \sqrt{r}\,\sqrt{\tfrac{1-\cos\theta}{2}}\,[\cdots]$$

$$u = \sqrt{r-x}\left[3+\frac{x}{r}\right]$$

$$v = \sqrt{r-x}\;\frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{x}{r}-1}{\sqrt{r-x}}\left(3+\frac{x}{r}\right) + \sqrt{r-x}\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{y}{r}}{\sqrt{r-x}}\,\frac{y}{r} + \sqrt{r-x}\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{r-x}}\left[\frac{2x}{r}-2+\frac{x^2}{r^2}-\frac{x}{r}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{2(r-x)}{r}\right]$$

$$\frac{2x-2r}{r}+\frac{2r-2x}{r} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{x}{r}-1}{\sqrt{r-x}}\,\frac{y}{r} - \sqrt{r-x}\,\frac{xy}{r^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{y}{r}}{\sqrt{r-x}}\left(3+\frac{x}{r}\right) - \sqrt{r-x}\,\frac{xy}{r^3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{r-x}}\left[\frac{xy}{r^2}-\frac{y}{r}-\frac{3y}{r}-\frac{xy}{r^2}\right] = \frac{-2y}{r\sqrt{r-x}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{r}}\,\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= -2\sqrt{\frac{r+x}{r}} = +\frac{4}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\int \frac{u\,\alpha}{\pi r}\,(p_1 x_2)\,r\,d\varphi = \frac{u\,\alpha}{\pi}\,\log r$$

gdyby skończona różnica coś mówiła, to praca byłaby ∞

podobnie gdy w przestrzeni:

$$\int \frac{u\,\alpha^2}{r^2}\,(p_1 - p_2)$$

$u = -\sqrt{r}\left[\frac{y}{r}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right]$

$v = \sqrt{r}\left[\frac{x}{r}\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right] = \left[\frac{x}{r} - 1\right]\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}$

$u = -\sqrt{r}\left[\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right] = -\sqrt{r}\left[2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right] = -\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\left[\underbrace{2\cos^2\frac{\theta}{2}}_{=1+\cos\theta} + 1\right] =$

$u = -\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{r-x}{2}}$

$v = -\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{r+x}{2}}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}\ \frac{\frac{x}{r}-1}{\sqrt{r-x}}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2}\ \frac{\frac{y}{r}}{\sqrt{r+x}}$

$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\left(\frac{x}{r}-1\right)\sqrt{r+x} + \frac{y}{r}\sqrt{r-x}}{r\sqrt{r^2-x^2}}\right\}$

$\left(\frac{\cos\theta - 1}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2} = 0$

$u = -\frac{y}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$. $\quad = -\frac{y}{2\sqrt{r}}\sqrt{\frac{r+x}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\ y\sqrt{\frac{1}{r} + \frac{x}{r^2}}$

$v = \frac{x}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{x}{2r}\sqrt{\frac{r+x}{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{r} + \frac{x}{r^2}}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[+\frac{yx}{r^3}\sqrt{r+x} - \frac{y}{2r^2}\frac{\frac{x}{r}+1}{\sqrt{r+x}}\right] = \frac{\sqrt{r+x}}{2\sqrt{2}}\ \frac{y}{r^2}\left[\frac{x}{r} - \frac{1}{2}\right]$

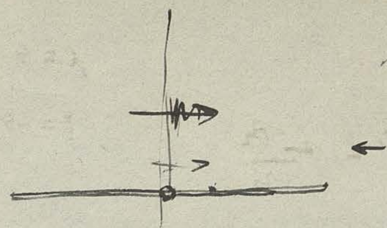
$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{-xy}{r^3}\sqrt{r+x} + \frac{x}{2r^2}\frac{\frac{y}{r}}{\sqrt{x+r}}\right] = \frac{}{2\sqrt{2}\ r^3\sqrt{r+x}}$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{-\sqrt{r+x}\ y}{r^2} + \frac{xy}{r^2\sqrt{r+x}}\right] = \frac{1}{4\sqrt{2}\ r^2\sqrt{r+x}}\left[-y(x+r) + xy\right]$

$= \frac{-y}{4\sqrt{2}\ r\sqrt{r+x}}$

$u = \frac{y^2}{r^4} - \frac{4x^2y^2}{r^6}$

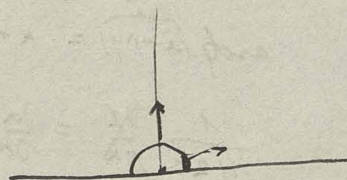
$v = \frac{4y^3x}{r^6}$



$u = \frac{y^2(y^2-3x^2)}{r^6}$

$u = \frac{2xy}{r^4} - \frac{4x^3y}{r^6}$

$v = \frac{y^2}{r^4} - \frac{4x^2y^2}{r^6}$



$u = 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} - 4\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{r^2}$

$v = \frac{\sin^2\theta}{r^2} - 4\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^4}$

$v_r = u\cos\theta + v\sin\theta$

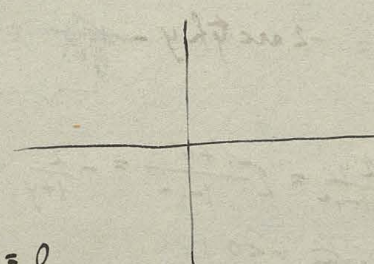
$= \int_0^\pi r \left(\frac{2\sin\theta\cos^2\theta + \sin^3\theta}{r^2} - 8\frac{\sin^3\theta\cos^2\theta + \ldots}{r^2} \right) d\theta$

$\frac{p - iq}{4} = \lg z = \lg r + i\theta$

$q = -4\theta$

$x + iy$

$u =$



$u = +2y\theta + \ldots + Rf$

$v = -2x\theta + 2y - If$

$\theta = 0:$	$u = 0$, $v = 0$	$\theta = 2\pi$	$u = 0$, $v = -4\pi x$
$\theta = \frac{\pi}{2}$	$u = \pi y$, $v = y$		

$u = 2\frac{\partial\beta}{\partial x}y$

$p = 4\frac{\partial\alpha}{\partial x}$

$\xi = -4\frac{\partial\beta}{\partial x}$

$y = \operatorname{tgh}\beta = \frac{\sinh\beta}{\cosh\beta}$

$v = -2\beta - 2x\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\sin\theta_1}{r_1} - \frac{s\,\theta_2}{r_2}$

$\frac{dy}{d\beta} = 1 - \frac{\sinh^2\beta}{\cosh^2\beta} = 1 - y^2$

~~$\theta = \frac{2\cosh 2\beta\,\frac{\partial\beta}{\partial x}}{\cosh 2\beta + \cos 2\alpha}$~~

$\operatorname{arctg}\overbrace{(x+iy)}^{2} = \alpha + i\beta$

$\frac{d\beta}{dy} = \frac{1}{1-y^2}$

$\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + i\frac{\partial\beta}{\partial x} =$

$$\frac{1}{1+x^2-y^2+2ixy}$$

$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2-y^2)^2 - 4x^2y^2}$ $\qquad \frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{-2xy}{(1+x^2-y^2)^2 - 4x^2y^2}$

$x = 0$: $\quad u = 0$ $\qquad$ | $y=0$ $\quad u = 0$, $v = 0$

$v = -2\beta \ldots$

$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ $\quad - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

$\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$

-2β

$-\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$

$y = \operatorname{ctgh}\beta = \frac{\cosh\beta}{\sinh\beta}$

$v = -2\operatorname{arctgh} y + \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}$, $\quad \frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y} = \frac{2y}{1-y^2}$

$\frac{dy}{d\beta} = +1 - \frac{\cosh^2\beta}{\sinh^2\beta} = 1 - y^2$

$\frac{d\beta}{dy} = -\frac{1}{y^2-1}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2}{1+y^2} + \frac{2y}{1-y^2} = 2\frac{-1+y}{1-y^2} = -\frac{2}{1+y}$

zatem $v < 0$

$v = -2\operatorname{arcctgh} y - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2}{y^2-1} - \frac{2y}{y^2-1} = 2\frac{1-y}{y^2-1} = -\frac{2}{1+y}$

76

$$u = -\sqrt{\frac{r-x}{2}} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\frac{x}{r}-1}{\sqrt{r-x}} - \frac{\frac{y}{r}}{\sqrt{r+x}}\right]$$

$$v = +\sqrt{\frac{r+x}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}\,r}\left[-\sqrt{r-x} - \frac{y}{\sqrt{r+x}}\right] = \frac{2y}{2\sqrt{2}\,.\,r\sqrt{r+x}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{2}\,r\sqrt{r+x}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}\sqrt{\left(\frac{r-x}{2}\right)^3} + \frac{3}{2}\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{r-x}{2}}\;\frac{\frac{x}{r}-1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{r-x}\;(r-x)}{\sqrt{8}\,.\,r^2}\left[-\frac{x}{r} - \frac{3}{2}\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = +\frac{y}{r^3}\sqrt{\frac{(r+x)(r-x)^2}{8}} - \frac{1}{2}\frac{1}{r\sqrt{8}}\frac{\frac{y}{r}(r-x)^2 + 2(r^2-x^2)\frac{y}{r}}{\sqrt{(r+x)(r-x)^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{8}\,r^3}\;\frac{(r+x)(r-x) - \frac{1}{2}r\left[(r-x) + 2(r+x)\right]}{\sqrt{(r+x)}}$$

$$2r^2 - 2x^2 - r(3r+x) = \frac{-r^2 - rx - 2x^2}{2\sqrt{r+x}}$$

$$= \frac{-}{r^3\sqrt{8}}\left\{\frac{\sqrt{r-x}\,(r-x)\left[x + \frac{3}{2r}\right]2\sqrt{r+x} + (r^2+rx+2x^2)\,y}{2\sqrt{r+x}}\right\}$$

$$\frac{2z\,dz}{(1-z)^2} = ____$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z} + \frac{1+z}{(1-z)^2} = \frac{1-z+1+z}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2} \qquad y(1-z)^2 =$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{x}{r}\sin^3\frac{\theta}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{r}\,\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r}}\left[\cos\theta\sin^3\frac{\theta}{2} - 3\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

$\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{xy}{r^3}$ | $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{xy}{r^3}$

$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}$

$$+\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{y}{r}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sqrt{r}\left[2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^3\frac{\theta}{2}\right]\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{r}}\left[\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \left[2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^3\frac{\theta}{2}\right]\cos\theta\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\left[2\cos\theta\sin^3\frac{\theta}{2} - 4\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \right.$$

$$\left. - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta + \sin^3\frac{\theta}{2}\cos\theta\right]$$

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sqrt{r}}\left[\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta\right]$$

$\sin^2\theta - \cos^2\theta$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r\sqrt{r}}\left[2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\right] + \frac{2}{\sqrt{r}}\left[2\cos^3\frac{\theta}{2} - 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\right]\frac{\sin\theta}{r}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{r}}\left\{2\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta + 2\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\theta - 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right.$$

$$\left. - \sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta + \sin^3\frac{\theta}{2}\cos\theta\right\}$$

$$\cos\theta\left\{2\sin\frac{\theta}{2}\cos^3\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin^3\frac{\theta}{2}\right\} + \sin\theta$$

Ruggiungere ~~[illegible]~~

77

$$H = -\mathcal{G} = \frac{1}{8}\left\{ z \operatorname{arcsinh} z - \sqrt{1+z^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ (x+iy)(p+i\xi) - \sqrt{1+(x+iy)^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ px + \xi y + i(py + \xi x) - \sqrt{\underbrace{1+x^2-y^2+2ixy}_{Re^{i\theta}}} \right\}$$

$$= \sqrt{R}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \sqrt{R}\left\{ \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} + 1+x^2-y^2\right]} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} - (1+x^2-y^2)\right]}$$

$$u = \underbrace{\frac{xp - \xi y}{4} - \frac{px+\xi y}{4}}_{-\frac{\xi}{2}y} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} + 1+x^2-y^2\right]}}_{\sqrt{R}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$v = \underbrace{\frac{py+\xi x}{4} - \frac{py+\xi x}{4}}_{\frac{\xi x}{2}} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} - (1+x^2-y^2)\right]}}_{\sqrt{R}\sin\frac{\theta}{2}}$$

$x=0$

$+\sqrt{1-y^2}$ dla $y<1$

dla $y>1$

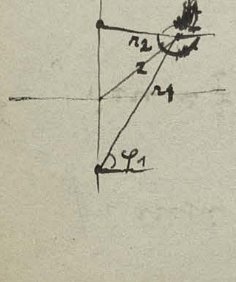
respect. $\sqrt{\frac{1}{2}(-\sqrt{1-y^2}+2y^2)} = 0$

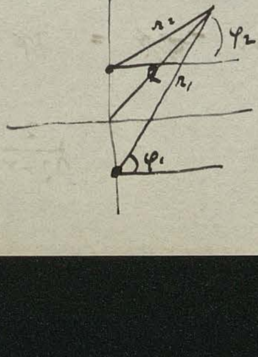
$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[(1-y^2) - (1-y^2)\right]} = 0$ $\quad y<1$

$v = \sqrt{y^2-1}$ $\quad y>1$

$$\sqrt{z^2+1} = \underbrace{\sqrt{z+i}}_{\sqrt{r_1}}\ \underbrace{\sqrt{z-i}}_{\sqrt{r_2}} = \sqrt{r_1}\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + i\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\sqrt{r_2}\left(\cos\frac{\varphi_2}{2} + i \sin\frac{\varphi_2}{2}\right)$$

$$= \sqrt{r_1 r_2}\left\{\left[\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2} - \sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}\right] + i\left[\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2} + \cos\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}\right]\right\}$$





$$R\left(\sqrt{z^2+1}\right)\Big|^{x=0}_{y<1} = \sqrt{\frac{r_1 r_2}{2}}$$

$$y>1 \quad = -\sqrt{\cdots}$$

$$J\left(\sqrt{z^2+1}\right)\Big|^{x=0} = 0$$

$\int i \arcsin \frac{x+iy}{i}$

$F = \int i \arcsin \frac{z}{i} dz = -\int \arcsin \frac{z}{i} \, d\left(\frac{z}{i}\right)$

$= -\arcsin \frac{z}{i} \cdot \frac{z}{i} + \int \frac{z}{i} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$

$= -\frac{z}{i} \arcsin \frac{z}{i} - \sqrt{1+z^2}$

$R\,F = R\left\{ z(p - i\xi) - \sqrt{1+z^2} \right\} = xp + y\xi - R\sqrt{1+z^2}$

$J = -x\xi + py - J\sqrt{1+z^2}$

$f = \frac{F}{2}$

$u = \frac{xp}{2} - \frac{1}{2} R\sqrt{1+z^2}$

$v = x\xi - \frac{py}{2} + \frac{\xi}{2} J\sqrt{1+z^2}$

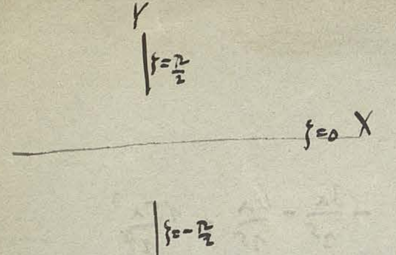
$\Big|^{x=0} = 0$

$-\frac{py}{2} + \ldots$

$\frac{e^{p-i\xi} - e^{-p+i\xi}}{2} =$

$\frac{e^{p}(\cos\xi - i\sin\xi) - e^{-p}(\cos\xi + i\sin\xi)}{2}$

$\cos\xi \frac{(e^{p} - e^{-p})}{2} - i\sin\xi \frac{e^{p} + e^{-p}}{2}$



$x+iy = \sinh(\rho + i\xi)$

$x = \sinh\rho \cos\xi$

$y = \cosh\rho \sin\xi$

$\rho + i\xi = \operatorname{arcsinh}(x+iy)$

$8X' = \operatorname{arcsinh}$

$2X' = H' - S'$

$H - S = \frac{1}{4}\int \operatorname{arcsinh} z \, dz$

$\int \operatorname{arcsinh} z \, dz = \mathcal{F}(z)$

$\operatorname{arcsinh} z = \mathcal{F}'(z)$

$z = \sinh[\mathcal{F}'(z)] = \dfrac{e^{\mathcal{F}'(z)} - e^{-\mathcal{F}'(z)}}{2}$

$\sinh z = i \sin\frac{z}{i}$

$z = i \arcsin\left(\frac{\sinh z}{i}\right)$

$\operatorname{arcsinh} = i \arcsin \frac{}{i}$

$z = \Phi[\overbrace{\int \operatorname{arcsinh}}^{\mathcal{F}}]$

$1 = \operatorname{arcsinh} z \cdot \Phi'[\overbrace{\int \cdots}^{\mathcal{F}}]$

$\operatorname{arcsinh} z = \dfrac{d\mathcal{F}}{d\Phi} = \dfrac{d\mathcal{F}}{dz}$

$\dfrac{d}{d\mathcal{F}}[\Phi(\mathcal{F})] = \dfrac{1}{\operatorname{arcsinh} z} = \dfrac{2}{e^{z} - e^{-z}} = \dfrac{2}{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}$

$z = \sinh \frac{d\mathcal{F}}{dz}$

$[e^{\Phi} - e^{-\Phi}]\, d\Phi = 2\, d\mathcal{F}$

$e^{\Phi} + e^{-\Phi} = 2\mathcal{F} + \text{const}$

$\int \arccos x = x \arccos x + \sqrt{1-x^2}$

$\mathcal{F}(z) = i\int \arcsin\frac{z}{i}\, dz = \quad - \int \arccos\frac{z}{i}\,\frac{dz}{i}$

$= -\frac{z}{i} \arccos\frac{z}{i} \pm \sqrt{1-\left(\frac{z}{i}\right)^2} = z \operatorname{arcsinh} z - \sqrt{1+z^2}$

$\frac{1}{2r^3} - \frac{3x^2}{2r^5}$ | $- \frac{9x^2}{2r^5} + \frac{15x^4}{2r^7}$

$\frac{1}{2r^3} - \frac{3y^2}{2r^5}$ | $- \frac{3x^2}{2r^5} + \frac{15x^2y^2}{2r^7}$

$\frac{1}{2r^3} - \frac{3z^2}{2r^5}$ | $- \frac{3x^2}{2r^5} + 15 \ldots$

$-\frac{3x}{r^5} - \frac{6x}{r^5} + \frac{15x^3}{r^7}$

$-\frac{9x}{r^5} + \frac{15x^3}{r^7}$

$\Delta^2 \frac{x^3}{r^5} = \frac{3x^2}{r^5} - \frac{15x^4}{r^7}$ $\qquad -\frac{5x^3y}{r^7}$

$\frac{6x}{r^5} - \frac{15x^3}{r^7} - \frac{20x^3}{r^7} + \frac{35x^5}{r^9}$

$-\frac{5x^3}{r^7} + \frac{35x^3y^2}{r^7} = \frac{6x}{r^5} - \frac{10x^3}{r^7}$

$-\frac{5x^3}{r^7} + \frac{35x^3z^2}{r^7}$

$\Delta^2 \frac{x^2y}{r^5}$ $\qquad \frac{2xy}{r^5} - \frac{5x^3y}{r^7}$ $\qquad \frac{x^2}{r^5} - \frac{5x^2y^2}{r^7}$

$\frac{2y}{r^5} - \frac{10x^2y}{r^7} - \frac{15x^2y}{r^7} + \frac{35x^4y}{r^9}$

$-\frac{5x^2y^2}{r^7}$ $\qquad -\frac{5x^2y}{r^7} - \frac{10x^2y}{r^7} + 35x^2y^3 = \frac{2y}{r^5} - \frac{10x^2y}{r^7}$

$-\frac{5x^2y}{r^7}$ [illegible] $+ \ldots x^2 z^2$

$\frac{3y}{r^5} - \frac{15x^2y}{r^7}$

$$\int \quad = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$H'' - G''.\, z\, dz = \frac{z}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$H' - G' = \lg\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\frac{-z}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\arccos z$$

$$= \lg\left(z + \sqrt{(z+i)(z-i)}\right)$$

$$= \lg\left[z + \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\frac{(\theta_1+\theta_2)}{2}}\right]$$

$$= \log\left[x + \sqrt{r_1 r_2} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\left\{y + \sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right\}\right]$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \sqrt{r_1 r_2 \frac{1+\cos(\theta_1+\theta_2)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1 r_2 + x_1 x_2 - y_1 y_2}$$

$$\sqrt{r_1 r_2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1 r_2 - y_1 x_2 - y_2 x_1}$$

$$\frac{1}{x+iy+i} + \frac{1}{x+iy-i} = \frac{2z}{z^2+1}$$

$$\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{2z}{z^2+1} = \int H'' - G''\, z\, dz$$

$$\frac{2}{1+z^2} - \frac{4z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{2+2z^2-4z^2}{(1+z^2)^2} = 2\,\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}$$

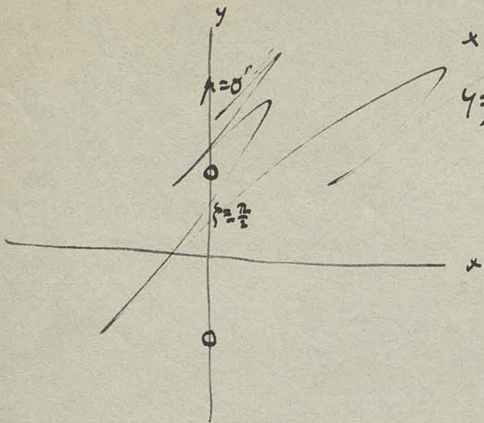
$$\int H'' - G'' \, dz = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+1}$$

$$H'' - G'' = \frac{\quad}{z\,(z+1)^2}$$

$$r \cos\theta$$

$$\arcsin z = \alpha + i\beta$$

$$\sqrt{z+i}\,\sqrt{z-i} = \sqrt{r_1 r_2}\left[\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$$



$x =$ [illegible]

$y =$ [illegible]

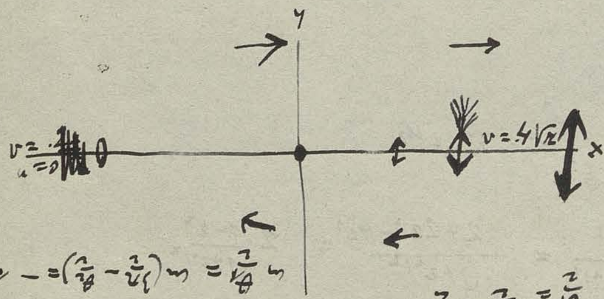
$$u = -\frac{2y}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) = \frac{2y}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$v = \frac{2x}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) - 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) \qquad v =$$

$\theta = \pi$	
$u = -\sqrt{2}$	
$v =$	

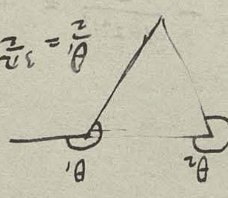
$$u = +\frac{2y}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$v = -\frac{2x}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2} + 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$$



$$-8\sqrt{\pi_1}\cos^3\frac{\theta_1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4} \qquad \cos\frac{3\pi}{4}$$



$$\theta_1 - \pi + \theta_2 - \pi = \pi$$

$$\theta_1 = 3\pi - \theta_2$$

$$\frac{\theta_1}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\theta_2}{2}$$

$$\sin\frac{\theta_1}{2} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right) = -\cos\frac{\theta_2}{2}$$

$$\cos\frac{\theta_1}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\theta_2}{2}\right) = -\sin\frac{\theta_2}{2}$$

$$(\cos\alpha+\sin\alpha)^2(\cos\alpha-\sin\alpha) - \sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha\cos\alpha = (\cos\alpha+\sin\alpha)\cos 2\alpha - \frac{\sin\alpha\sin 2\alpha}{2}$$

$$\cos^3\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha - \sin^3\alpha$$

$$= \cos\alpha\left[\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2(\cos 2\theta + 1)\frac{\partial \theta}{\partial x} \quad - \frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2 \sin 2\theta \frac{\partial\theta}{\partial y} \quad \frac{\cos\theta}{r}$$

$$\Sigma \cdot\cdot = \frac{1}{r}\left[+4\cos^2\theta \sin\theta - 4 \sin\theta \sin^2\theta\right] = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = +2\sin 2\theta \frac{\sin\theta}{r} + 2(\cos 2\theta + 1)\frac{\cos\theta}{r}$$

$$= \frac{4\sin^2\theta\cos\theta + 4\cos^3\theta}{r} = 4\frac{\cos\theta}{r}$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r^2} - \frac{\cos\theta \cdot x}{r^3}$$

$$\frac{y^2 - r^2}{r^4}$$

$$-\frac{\cos\theta \sin\theta}{r^2} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$

$$\frac{4xy}{r^4} - \frac{4x^3y}{r^6} + \frac{2xy}{r^4} - \frac{4xy^3}{r^6} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y^2}{r^4} - \frac{4x^2y^2}{r^6} - \frac{x^2}{r^4} + \frac{4x^2y^2}{r^6}$$

$$-\left[2(\overbrace{\cos^2\theta - \sin^2\theta}^{\cos 2\theta}) - 2\right]\frac{\sin\theta}{r}$$

$\sin^2\theta$

$$\frac{y^2}{r^4} - \frac{4x^2y^2}{r^6} - \frac{4y^4}{r^6} = 0$$

$$U = \sum \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{1}{r}$$

$$\frac{x}{r^3} \qquad \frac{y}{r^3}$$

$$\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \qquad \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$$

$$-\frac{9x}{r^5} + \frac{15x^3}{r^7}$$

$$V_2 = \frac{y}{r^4}$$

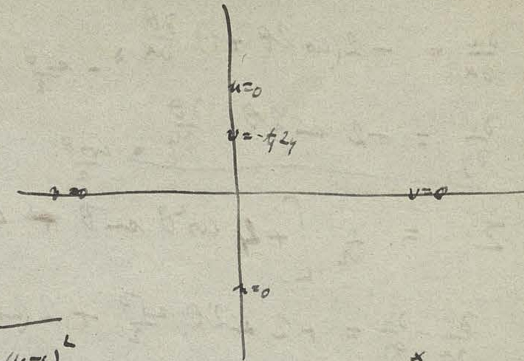
$$\nabla^2 V_2 = 4\frac{y}{r^6} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^5}\right)\cdot\frac{4}{5}$$

[illegible]

$\frac{x-1}{r_1^2} + \frac{x+1}{r_2^2}$

$-\frac{y}{r_1^2} \ldots \frac{y}{r_2^2} - \frac{y}{r_2^2} = 0$

$v + iu = \lg \frac{z-1}{z+1}$ $v = \lg \frac{r_1}{r_2}$



$x + iy = \lg \frac{v+iu-1}{v+iu+1}$ $x = \log \sqrt{\frac{v^2+(u-1)^2}{v^2+(u+1)^2}}$ $\frac{u-1}{u+1} = e^x$

$y = \operatorname{arctg} \frac{v}{u-1} - \operatorname{arctg} \frac{v}{u+1}$

$x = \sinh u \cos v$

$y = \cosh u \sin v$

$x = 0$ $v = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ \arcsin y \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\Big|$ $u = \begin{matrix} \operatorname{arccosh} y \\ 0 \\ \ldots\ldots \end{matrix}$ $y = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$

$y = 0$ $v = 0$ $u = \operatorname{arcsinh} x$

$\frac{\xi}{2}\left[-y - ix\right] + \int_{z=\beta} (H'' - S'') z\, dz + f(\alpha) = u - iv$

$\underbrace{}$

$\frac{\xi}{2}(x + iy)$

$\frac{\xi\alpha}{2} + \int_{z=\beta} (H'' - \Theta'') z\, dz + f(\alpha) = 0$ dle [illegible]

[illegible] typ f do [illegible]!

$$u = \beta X'(\alpha) + \alpha X'(\beta) + \frac{S(\alpha) - S(\beta)}{i}$$

$$v = i[\beta X'(\alpha) - \alpha X'(\beta)] + H(\alpha) + H(\beta)$$

$$\frac{\xi}{2} = H'(\alpha) + H'(\beta) - S(\alpha) - S(\beta) = 2i[X'(\alpha) - X'(\beta)] = -4 \, \mathfrak{I} X'$$

$$2[X'(\alpha) + X'(\beta)] = -\left\{\frac{S(\alpha) - S(\beta)}{i} + i[H'(\alpha) - H'(\beta)]\right\}$$

$$i\{H'(\alpha) - H'(\beta) - S(\alpha) + S(\beta)\} = +2[X'(\alpha) + X'(\beta)] = +4 \, \mathfrak{R} X'$$

$$4X'(\alpha) = i\{-2H'(\beta) + 2S'(\beta)\}$$ niemožné

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4}\left\{\rho + x\frac{\partial \rho}{\partial x} - y\frac{\partial \xi}{\partial x} + \rho + y\frac{\partial \rho}{\partial y} + x\frac{\partial \xi}{\partial y}\right\} + S'(\alpha) + S'(\beta) + \{H'(\alpha) + H'(\beta)\}$$

$$2\mathfrak{R}(S' - H')$$

$$-4\mathfrak{R}X'$$

$$= -\frac{\rho}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y\frac{\partial \rho}{\partial x} + \xi + x\frac{\partial \xi}{\partial x} - x\frac{\partial \rho}{\partial y} + \xi + x\frac{\partial \xi}{\partial y}}{4} + 2i[H'(\alpha) - H'(\beta)] - 2i[S'(\alpha) - S'(\beta)]$$

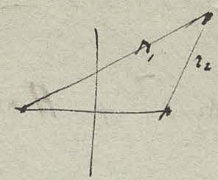
$$2[-\mathfrak{I}H'(\alpha) + \mathfrak{I}S'(\alpha)]$$

$$= -4\,\mathfrak{I}(X')$$

$$= +\frac{\xi}{2}$$

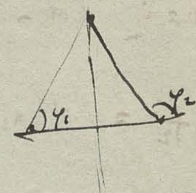
$$= \xi$$

Zvolíš funkci $(x+iy)$ takže osy



$$R\, f(x+iy)\Big|_{x=0} = y\frac{\pi}{4} \quad y>0$$

$$-y\frac{\pi}{4} \quad y<0$$



$$\sqrt{z^2-1} = \sqrt{(z+1)(z-1)} = \sqrt{r_1 r_2}\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + i\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi_2}{2} + i\sin\frac{\varphi_2}{2}\right)$$

$$R = \sqrt{r_1 r_2}\Big[\underbrace{\cos\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2} - \sin\frac{\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2}}_{\cos\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\Big]$$

$$R\Big|_{x=0} = 0$$

$$e^{i\alpha-\beta} - e^{-i\alpha+\beta}$$

$$\arcsin z = u = \alpha + i\beta$$

$$z = \sin u = x+iy = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} = \cos\alpha\,\frac{e^{-\beta}-e^{\beta}}{2i} + \sin\alpha\,\frac{e^{-\beta}+e^{\beta}}{2}$$

$$z \log z$$

$$(x+iy)\left(\log r + i\,\theta\right) = x\log r - y\theta \quad + i\left[y\log r + x\theta\right]$$

$$R(z\log z) = x\log\sqrt{x^2+y^2} - y\measuredangle$$

$$x = \sin\alpha\,\frac{e^{-\beta}+e^{\beta}}{2} = \sin\alpha\cosh\beta$$

$$y = \cos\alpha\,\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2} = \cos\alpha\sinh\beta$$

$\frac{3}{16} \cdot 12 \quad \frac{9}{4}$

$$z e^z = (x+iy)\, e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$= e^x[x\cos y - y\sin y] + i\,e^x(y\cos y + x\sin y)$$

$$x=0: \quad \underbrace{}_{= -y\sin y}$$

$-\frac{27}{2} - \frac{\ell}{2}$

$$p_1 = \frac{27}{16}\left[\frac{1}{3r^4} - \frac{2x^2}{2^6} + \frac{x^4}{2^8}\right]$$

$-\frac{27}{2} - \frac{\ell}{2}$

$8.(8-10-1)$

$4(4-2-1) \quad 6(6-6-1)$

$F = \lg z^2$

$z^2 = e^F$

$z^2 = \frac{e^F + e^{-F}}{2} = \cosh F$

$= \frac{e^{R+iJ} + e^{-R-iJ}}{2}$

$= \frac{(\cos J + i \sin J)\, e^R + (\cos J - i \sin J)\, e^{-R}}{2}$

$= \cos J \, \frac{e^R + e^{-R}}{2} + i \sin J \, \frac{e^R - e^{-R}}{2}$

$z^z = e^{z \log z}$

$\frac{-6+9-5}{24} = -\frac{1}{12}$

$p = \frac{x}{r^3}$

$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} = \Delta^2 u$

$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)$

$U = \frac{x^2}{2r^3} + \frac{k}{r} + \frac{mx}{r^3}$

$u = \frac{x^2}{2r^3} + \frac{1}{2r}$

~~$U_1 = \int \frac{4r^2\pi\, dr}{r} = 2r^2\pi$~~

~~$U_1 = 2\pi r$~~

~~$U_2 = \int \frac{4r^2\pi\, dr}{r^2} = 4\pi r$~~

$U = 6\pi r$

$u = 6\pi r \frac{x}{r}$ | $6\pi\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$

$\Delta^2 \frac{x^2}{r^3} =$

$\frac{\partial}{\partial x}$ $\frac{2x}{r^3} - \frac{3x^3}{r^5}$ | $-\frac{3x^2y}{r^5}$ | $-\frac{3x^2z}{r^5}$

$\frac{2}{r^3}$ ~~$- \frac{6x^2}{r^5} - \frac{9x^2}{r^5} + \frac{15x^4}{r^7}$~~ $- \frac{3x^2}{r^5} + \frac{15x^2y^2}{r^7} - \frac{3x^2}{r^5} + \frac{15x^2z^2}{r^7}$

$= \frac{2}{r^3} - \frac{6x^2}{r^5}$

$\Delta^2 v = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{r}\right)$

$v = \frac{xy}{2r^3}$

$w = \frac{xz}{2r^3}$

$-3\frac{xyz}{r^5}$

$\frac{y}{r^3} - \frac{3x^2y}{r^5}$

$\Delta^2\left(\frac{xy}{r^3}\right) =$ ~~$-\frac{3xy}{r^5} - \frac{6xy}{r^5} + \frac{15x^3y}{r^7}$~~

$-\frac{3xy}{r^5} - \frac{6xy}{r^5} + \frac{15xy^3}{r^7}$ $= -\frac{6xy}{r^5}$

$-3\frac{xy}{r^5}$ $+\frac{15xyz^2}{r^7}$

$4(4-5)$

-4

$\frac{3xy}{r^5}$

$H = \frac{xy}{r^4}$

$\Delta^2 \frac{xy}{r^4} = -4\frac{xy}{r^6}$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{x}{r^3} - \frac{3x^3}{2r^5} + \frac{x}{2r^3} - \frac{3xy^2}{2r^5} + \frac{x}{2r^3} - \frac{3xz^2}{2r^5} - \frac{x}{2r^3}$

$= \frac{2x}{r^3} - \frac{3x}{2r^3} - \frac{x}{2r^3} = 0$

zatem możliwy system równań:

$u = \frac{x^2}{2r^3} + \frac{1}{2r}$

$v = \frac{xy}{2r^3}$

$w = \frac{xz}{2r^3}$

$u = \frac{x}{r^3} - \frac{x}{2r^3} - \frac{3x^3}{2r^5} = \frac{x}{2r^3} - \frac{3x^3}{2r^5}$

$v = \frac{y}{2r^3} - \frac{3x^2y}{2r^5}$

$w = \frac{z}{2r^3} - \frac{3x^2z}{2r^5}$

$p = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$

$u = +\frac{3x^3}{2r^5}$

$v = +\frac{3x^2y}{2r^5}$

$w = +\frac{3x^2z}{2r^5}$

stimmt!

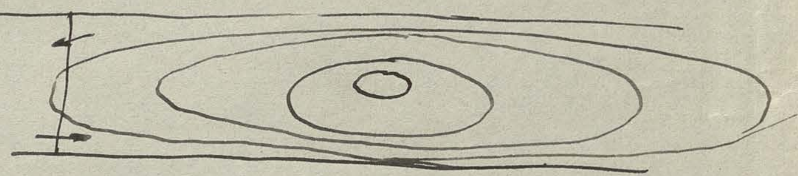
$\} = 0$ dla $x = 0$

$\frac{v}{u} = \frac{y}{x}$

prostolinijny wypływ przez otwór w ścianie

$\nabla p = \mu \nabla^2 v$

$0 = \nabla^2 \operatorname{curl} v$ $\qquad \nabla^2 \xi = \nabla^2 \eta = \nabla^2 \zeta = 0$



aby ~~[illegible]~~ praca była skończona musi być prędkość być skończ.

q = przekrój kanału z kulą)

gdyby $\lim_{\infty} q$ = skończ.

ale wtedy $\lim_{\infty} \Phi$ skończ.

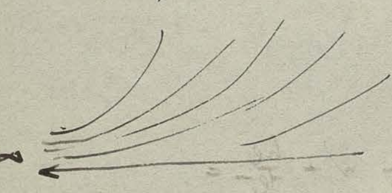
więc $\int \Phi \, dv$ nieskończ.

więc $\lim_{\infty} q$ musi być nieskończona!

$\lim_{\infty} f(x) = 0$ $\qquad$ ~~$f(x) = f(\frac{1}{y})$~~

$\lim_{\infty} f'(x) =$ ~~$\lim_{y=0} f'(\frac{1}{y}) \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx}$~~ $\qquad \nabla^2 p = 0$

Czy możliwe żeby v skończone w ∞ w pewnym punkcie?



$\lim \int (v_n)\, r^2 \, d\omega$ = finite

$r^2 \int (v_n)\, d\omega$

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta^2 u$$

$$u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta^2 v$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$-\Delta^2 p = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \dots\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\dots\right)$$

$$\Delta^2(\Delta^2 \psi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y}\right)$$

$$= \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}\right) \zeta$$

$f(\alpha) = e^{\frac{\alpha}{c}}$

$u = \frac{(\alpha-\beta)}{c}\left(e^{\frac{\alpha}{c}} - e^{\frac{\beta}{c}}\right)$

$v = \frac{1}{i}\left[2\left(e^{\frac{\beta}{c}} - e^{\frac{\alpha}{c}}\right) + \frac{(\alpha-\beta)}{c}\left(e^{\frac{\alpha}{c}} + e^{\frac{\beta}{c}}\right)\right]$

$e^{\frac{r}{c}\cos\theta + i r\theta} = e^{x}[\cos\ldots + i \sin\ldots]$

$= e^{\frac{x}{c}}\left[\cos\frac{y}{c} + i\sin\frac{y}{c}\right]$

$u = -\frac{4y}{c}\, e^{\frac{x}{c}} \sin\frac{y}{c}$

$v = -4 e^{\frac{x}{c}} \sin\frac{y}{c} + \frac{4x}{c}\, e^{\frac{x}{c}} \cos\frac{y}{c}$

$\xi = \frac{8}{c}\, e^{\frac{x}{c}} \sin\frac{y}{c}$

$p = \frac{8}{c}\, e^{\frac{x}{c}} \cos\frac{y}{c}$

$\alpha \cdots \frac{1}{\sqrt{z}}$

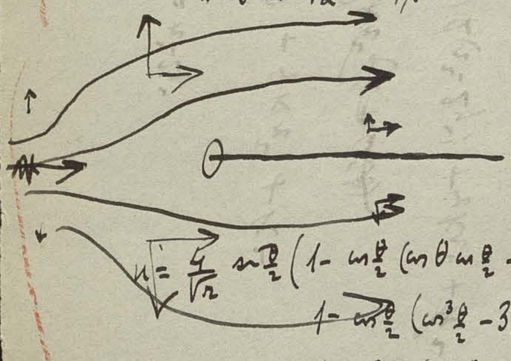
$f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \qquad f'(\alpha) = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha}^3}$

$= \frac{4}{\sqrt{r}}\left(\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right)$

$u = i\left[2\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\right] \pm iy\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}^3} + \frac{1}{\sqrt{\beta}^3}\right) = +\frac{4}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{2y}{\sqrt{r}^3}\cos\frac{3\theta}{2}$

$v = +iy\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}^3} - \frac{1}{\sqrt{\beta}^3}\right]$

$= \frac{2y}{\sqrt{r}^3}\sin\frac{3\theta}{2} = \frac{4}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}$



$\xi = -\frac{4}{2\sqrt{r}^3}\cos\frac{3\theta}{2}$

$p = \frac{4}{2\sqrt{r}^3}\sin\frac{3\theta}{2}$

$u = \frac{4}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} - \sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$1 - \cos\frac{\theta}{2}\left(\cos^3\frac{\theta}{2} - 3\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$

$\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$

$1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - 3 + 3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$

$u = \frac{4}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}\left[1 + \cos^2\frac{\theta}{2}\left(3 - 4\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]$

$v = \frac{4}{\sqrt{r}}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left[3\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right] = \frac{4}{\sqrt{r}}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left[4\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right]$

(Tutaj cały ruch zostaje orkutek tawie w punkcie O niech. szybko się porusza (Doppelquelle?)

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x}$$

$x^2 - y^2 = r^2 - 2y^2$

$5r^4 + (k-2r^2)\,2r^2\cos 2\theta + 4kr^2 + k^2$

$5r^4 + (k-2r^2)\,2(r^2-2y^2) + 4kr^2 + k^2$

$= 5r^4 + 6kr^2 - 4ky^2 - 4r^4 + 8r^2y^2 +$

$= r^4 + 8r^2y^2 + 6kr^2 - 4ky^2 + k^2$

$4y$

$2 + \cos 2\theta \pm i \sin 2\theta$

$(a+b-c)(a-b-c)$

$4\{8y^2r^2 + k^2 - 2kr^2 + r^4$
$- 4ky^2 + \}$

$$\begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ - & - & + \end{pmatrix}$$

$[5 + 4\cos 2\theta] - k^2 + 2kr^2[2 + \cos 2\theta] = 0$

$+5r^4 - 4r^2(r^2-2y^2) + k^2 - 4kr^2 + 2k(r^2-2y^2) = 0$

$r^4 + 8r^2y^2 + k^2 - 4kr^2 + 2kr^2 - 4ky^2$

$f(\alpha) = \frac{\log\alpha}{\alpha}$

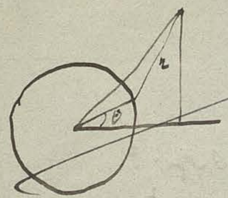
$f'(\alpha) = -\frac{\log\alpha}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2}$

$\frac{\log r + i\theta}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)$

$u = 2iy\left[\frac{1}{r^2}\sin 2\theta - \frac{\theta\cos 2\theta - \log r \sin\theta}{r^2}\right]$

$v =$

$$\xi = \int f(\theta) \frac{a\, d\theta}{r}$$



$$\frac{xy}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = c$$

$$\left[\frac{y}{2r} - \frac{x^2 y}{2r^3} - \frac{y}{r^2}\right]$$

$$\frac{x}{2r} - \frac{xy^2}{2r^3} - \frac{x}{r^2} = -\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \xi$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^3}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \int_\sigma \xi \log\frac{1}{r}\cos(\nu x)\, d\sigma + \int_\omega \frac{\partial\xi}{\partial\xi} \log \ldots (\tfrac{1}{r})\, d\omega$$

d.

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = +\frac{\cos\theta}{r}\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} = \frac{2\sin 2\theta}{r^2} = 4\frac{xy}{r^4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \int_\sigma \xi \log\frac{1}{r}\, d\sigma + \int_\omega \frac{\partial\xi}{\partial n}\log\frac{1}{r}\, d\omega$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = \int_\sigma \xi \log\frac{1}{r}\, dn + \int_\omega \frac{\partial\xi}{\partial s}\log\frac{1}{r}\, d\omega$$

ψ braucht aber nicht eindeutig zu sein!

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$$

$$\sqrt{\alpha^2-1} \qquad \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$g'(\alpha) = \alpha f(\alpha) - f(\alpha)$$

$$\nabla^2\left(\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0$$

$$= \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-1}} - \sqrt{\alpha^2-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$$

$$\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = 0$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$g(\alpha) = \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})$$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\sqrt{\beta^2-1} - \beta\sqrt{\alpha^2-1}\right] + \Im \log(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})$$

$$r\sqrt{r_1 r_2}\,\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \arcsin\left\{\frac{r\sin\theta + \sqrt{r_1 r_2}\,\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}{\sqrt{r^2 + r_1 r_2 + 2r\sqrt{r_1 r_2}\cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}}\right\}$$

$$= \frac{\nu-\mu}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$-\sin\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{1}{r}\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\neq \frac{xy}{r^4}$$

$$\frac{2r\sin\theta}{\sqrt{2r}} = \theta \quad \text{für kleine } r$$

$$\sqrt{1-r^2} = \sin\varphi \qquad r = \cos\varphi$$

$$\theta_1 = \pi, \quad \theta_2 = 0$$

$$= \frac{xy}{r^2} + \theta = c. = \frac{\sin 2\theta}{2} + \theta$$

$$\psi = r\sqrt{1-r^2}\begin{pmatrix}-1 & \theta=0\\ +1 & \theta=\pi\end{pmatrix} + \arcsin\left(\sqrt{1-r^2}\right) = \arccos r$$

$$2\theta + \frac{\pi}{2}\sin 2\theta = 2c$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2c - 2\theta}{\sin 2\theta}$$

~~Vergleichung mit Lamb u. Stokes.~~

~~$\varphi = \sin pt \, f(x,y)$~~

~~$-p^2 f = \nabla f \quad \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}$~~

~~$-p^2 f \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial\alpha\partial\beta} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$~~

~~$\frac{\partial}{\partial\alpha}(-p^2 f^2) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2$~~

~~$\frac{\partial}{\partial\beta}(-p^2 f^2) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^2$~~ ~~$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2$~~

$f = \alpha\,\varphi(\beta) + \beta\,\varphi(\alpha)^2$

~~$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = [\varphi(\beta) + \beta\varphi(\alpha)]^2$~~

$2\varphi(\beta)\varphi(\beta) + 2\varphi(\beta)\varphi(\alpha)$ ~~$+ \beta\varphi(\beta)\varphi(\alpha) + 2\beta\varphi(\alpha)^2$~~

$\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi = 0$

~~$\varphi = e^{\alpha x + \beta t}$~~

$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nu\nabla^2\varphi$

~~$\nu\alpha^2 - \beta = 0$~~ $\varphi = e^{\alpha x + \nu\alpha^2 t}$ ~~$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_2$~~

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ || Sup. $\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$

$\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$

$\varphi = \sum f_n(r)$ ~~[illegible]~~ e

~~$\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)$~~

~~$\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{\partial(r\varphi)}{\partial t}$~~

$\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)(\nabla^2\varphi) = 0$

$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\varphi = 0$

$r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = c$

$\varphi = a \lg r + b = \left[\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\right]\varphi$

~~$b+c = \frac{-y^2+1}{\sqrt{y^2-1}} = -\sqrt{y^2-1}$~~ ~~$b-c = \sqrt{y^2-1}$~~

$a+b-c=0$

~~$a+b-c=0$~~

$\psi = \frac{1}{2i}\left[\int \sqrt{\ldots}\, d\alpha - \int \ldots \, d\beta\right]$

$-u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+1} + \sqrt{\beta^2+1}\right)$

$v = \frac{1}{2i}\left[\sqrt{}_\alpha - \sqrt{}_\beta\right]$

$v = \frac{1}{2i}\left[\sqrt{\alpha^2+1} - \sqrt{\beta^2+1}\right]$

$(A+iB)\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

$r_1 r_2\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)(A+iB)$

$\Delta^2\psi = \frac{1}{2i}\left[-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\right] = \xi$

$-\frac{1}{2}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{}}\right. = \rho$

$\rho = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$

$2\cos\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\theta$

$-u = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\alpha^2+1} + \sqrt{\beta^2+1} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+1}} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} - \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+1}} - \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2+1}}\right] = \frac{-r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \cos\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]$

$v = \frac{1}{2i}\left[2\sqrt{\beta^2+1} - 2\sqrt{\alpha^2+1} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\beta^2+1}} - \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2+1}}\right] = -2\sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} +$

$+\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \sin\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]$

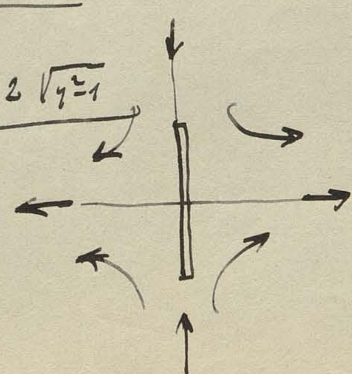
$-2\sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\theta$

$\theta = \frac{\pi}{2},\ \theta_1 = \frac{\pi}{2},\ \theta_2 = -\frac{\pi}{2}:\quad u = v = 0$

$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \frac{3\pi}{2}:\quad u = 0,\quad v = \mp 2\sqrt{y^2-1}$

$\theta = 0:\quad -u = -\frac{2r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}$

$v = 0$



Na ścianie musi być albo $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}=0$ albo $\frac{\partial\psi}{\partial\beta}=0$

i miejsca gdzie te warunki spełnione można przyjąć za ściany

Przyjmujemy formę: $\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha) + g(\alpha) + g(\beta)$

$\Phi_1 = \underbrace{f(\beta) + \beta f'(\alpha) + g'(\alpha)}=0$ jest równaniem ściany

musi być albo funkcją rzeczywistą, albo urojoną ale nie złożoną!

N.p. $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}$ $\quad \psi = \frac{\alpha^2\beta + \beta^2\alpha}{2} + \frac{\alpha^3+\beta^3}{6} = \frac{(\alpha+\beta)^3}{6} = x^3\cdot\frac{4}{3}$

$g(\alpha) = \frac{\alpha^3}{6}$ $\quad u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$

$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 4x^2$

$\Phi_1 = \frac{\beta^2}{2} + \beta\alpha + \frac{\alpha^2}{2} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} = 2x^2$ $\quad$ Ściana $x=0$

Przyjmujemy formę: $\psi = (\alpha+\beta)\left[f(\alpha) + f(\beta)\right] + h(\alpha) + h(\beta)$

$\Phi_1 = f(\alpha) + f(\beta) + (\alpha+\beta) f'(\alpha) + h'(\alpha)$

1) albo potrzeba aby urojona część: $\Im\left[x f'(\alpha) + h'(\alpha)\right] = 0$

to znaczy $x f'(\alpha)$ musi być urojoną częścią jakiejś $f(x+iy)$

więc musi zadość czynić równaniu $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$ czyli $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\left[(\alpha+\beta) f(\alpha)\right] = f''(\alpha)$$

Próba: $f(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ $\quad g(\alpha) = N\alpha$

$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}$

orthogonale Trajektorien da ψ

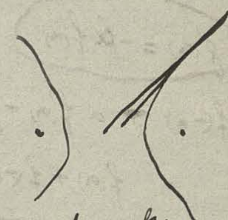
$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\frac{\partial\psi}{\partial x}} = \frac{u}{v}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0$$



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{ay}$$

$$\frac{d\alpha}{\frac{\partial\psi}{\partial\beta}} = \frac{d\beta}{\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}}$$

$$u^2+v^2 = 4\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}$$

$$p = \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)}$$

$$H = p\frac{\partial H}{\partial p} + \dots$$

$$\alpha^2+\beta^2 - b\alpha\beta = 0$$

$$f(\alpha) = \alpha b$$

$$g(\alpha) = \alpha^2$$

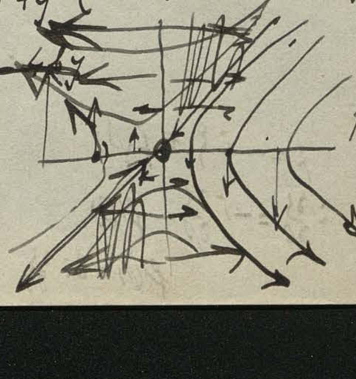
$$u = i\left[2b(\alpha^2 - \beta) + (\alpha-\beta)2b\right] = i(\alpha-\beta)4b = \text{[illegible]}$$

$x =$

$$\psi = \alpha^2+\beta^2 + 2\alpha\beta b$$
$$= x^2 - y^2 + 2b(x^2+y^2)$$
$$= x^2(1+2b) + y^2(2b-1) = x^2(1+2b) - y^2(1-2b)$$

$2b<1$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -2x(1+2b)$$
$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2y(2b-1)$$
$$= -2y(1-2b)$$



$$\sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{4x^2(1+4b^2+4b) + 4y^2(1+4b^2-4b)}$$

$x^2+y^2=a^2$

rovnanie

kvôli

$\alpha\beta=a^2$

$g'(\alpha)=-\alpha f'(\alpha)$

$f(\alpha)+f(-\alpha)+\alpha f'(\alpha)+g'(\alpha)=0$

$f(\alpha)+f(-\alpha)+2g'(\alpha)=0$

$f(\alpha)+f(-\alpha)=2\alpha f'(\alpha)$

$\alpha^2+\alpha^2=2\alpha\cdot 2\alpha$

$\alpha-\alpha=2\alpha\cdot 1$

$f(\alpha)=\sqrt{\alpha-1}$

$f'(\alpha)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha-1}}$

$(\varphi+i\psi)\,\overset{\alpha}{(x+iy)}$

$Rf+xRf'-yIf'+Rg'=0$

$xIf'-yRf'+Ig'=0$

$f(\alpha)=F(\alpha)+i\,\Phi(\alpha)$

$=m(x,y)+i\,n(x,y)+i\mu(x,y)-\nu(x,y)$

$f(-\alpha)=$

$u=-\frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{r_1}}\sin\frac{\theta_1}{2}$

$v=-\sqrt{r_1}\sin\frac{\theta_1}{2}+\frac{x}{2\sqrt{r_1}}\cos\frac{\theta_1}{2}$

$\psi=f(\alpha)(p+i\zeta)$?

nie! bo pri $\zeta=f(x+iy)$

a ψ nie je $f(x+iy)$

$\zeta=\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta}$

$\frac{\partial p}{\partial\alpha}+\frac{\partial p}{\partial\beta}=-i\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}-\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right)$

$\left(\frac{\partial p}{\partial\alpha}-\frac{\partial p}{\partial\beta}\right)=-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}+\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right)i$

$\frac{\partial p}{\partial\alpha}=-i\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}$

$\frac{\partial p}{\partial\beta}=i\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}$

?

p nie možno opustiť vzhľadom na ψ?

$p=-i\zeta+f(\beta)$

$i\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}=-i\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}+f'(\beta)$

$f'(\beta)=2i\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}$

$p=-i\zeta+2i\int\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\,d\beta$?

Dla koła c

$b_0 + \frac{a_1}{c} = 0$

$a_0 + \frac{b_1}{c} + \frac{a_2}{c^2} = 0$

$\frac{a_1}{c} + \frac{b_2}{c^2} + \frac{a_3}{c^3} = 0$

$2\frac{a_2}{c^2} + \frac{b_3}{c^3} + \frac{a_4}{c^4} = 0$

$3\frac{a_3}{c^3} + \frac{b_4}{c^4} + \frac{a_5}{c^5} = 0$

$a_0 + \frac{b_1}{c} + \frac{a_2}{c^2} = 0$

$\frac{a_1}{c} + \frac{b_2}{c^2} + \frac{a_3}{c^3} = 0$

$2\frac{a_2}{c^2} + \frac{b_3}{c^3} - \frac{a_4}{c^4} = 0$

$a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0$

$= b_3 = b_4 = \dots$

$a_1 + b_0 c = 0$

$a_0 c + b_1 = 0$

$a_1 c + b_2 = 0$

$R = -\frac{a_1}{c} + \frac{a_1}{r} + \cos\theta\left[a_0 - \frac{a_0 c}{r}\right] + \cos 2\theta\left[\frac{a_1}{r} - \frac{a_1 c}{r^2}\right]$

$S = -\sin\theta\left[a_0 - \frac{a_0 c}{r}\right] + \sin 2\theta\left[-\frac{a_1}{r} + \frac{a_1 c}{r^2}\right]$

jeśli $\lim_{\infty}$ $R = V\cos\theta$, $S = -V\sin\theta$

$a_0 = V$

$a_1 = 0$

$R = \cos\theta\left[1 - \frac{c}{r}\right] a_0$

$S = -\sin\theta\left[1 - \frac{c}{r}\right] a_0$

$R = r^2\cos\theta$

$S = -3r^2\sin\theta$

Ogólnie: $R = \sum\left[a_n r^n (n-1)\cos(n-1)\theta - b_n r^n \cos(n+1)\theta\right]$

$S = \sum\left[-a_n r^n (n+1)\sin(n-1)\theta + b_n r^n \sin(n+1)\theta\right]$

Jeśli $\lim_{\infty}\begin{cases}R\\S\end{cases}$ skończone: Dla ujemnych n:

$R = \sum\left[-\frac{a_n}{r^n}(n+1)\cos(n+1)\theta - \frac{b_n}{r^n}\cos(n-1)\theta\right] = \sum_1^{\infty}\cos n\theta\left[\frac{b_n}{r^n} - n\frac{a_{n-1}}{r^{n-1}}\right] + b_0$

$S = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{a_n}{r^n}(n-1)\sin(n+1)\theta - \frac{b_n}{r^n}\sin(n-1)\theta\right] = \sum_1^{\infty} -\sin n\theta\left[\frac{b_n}{r^n} + \frac{(n-2)a_{n-1}}{r^{n-1}}\right]$

Dla koła $r = c$:

$b_0 = 0$

$b_1 = a_0 c$ | $b_1 = a_0 c$

$b_2 = 2a_1 c$ | $b_2 = 0$ $= 0$

$b_3 = 3a_2 c$ | $b_3 = -a_2 c$

$R = -a_0\cos\theta + \frac{a_0 c}{r}\cos\theta = -a_0\cos\theta\left[1 - \frac{c}{r}\right]$

$S = +a_0\sin\theta - \frac{a_0 c}{r}\sin\theta = a_0\sin\theta\left[1 - \frac{c}{r}\right]$

$u = R\cos\theta - S\sin\theta = -a_0\left[1 - \frac{c}{r}\right]$

$v = R\sin\theta + S\cos\theta = 0$

$\psi = \frac{1}{i}\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right]a_1 + \frac{b_1}{i}(\lg\alpha - \lg\beta)$

$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y} = a_1\left\{-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\alpha}{\beta^2}\right\} + b_1\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{r}\left\{a_1(\cos\theta - \cos 3\theta) + b_1\cos\theta\right\}$

$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{a_1}{i}\left\{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\alpha}{\beta^2}\right\} + \frac{b_1}{i}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{r}\left\{a_1(+\sin\theta - \sin 3\theta) - b_1\sin\theta\right\}$

$R = \frac{1}{r}\left\{a_1\left[\cos^2\theta - \sin^2\theta - (\cos 3\theta\cos\theta + \sin 3\theta\sin\theta)\right] + b_1(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right\} = \frac{1}{r}\left\{a_1(1 - \cos 2\theta) + b_1\cos 2\theta\right\} = \frac{a_1}{r} + \frac{b_1 - 2a_1}{r}\cos 2\theta$

$S = \frac{1}{r}\left\{a_1(\cos 3\theta\sin\theta - \sin 3\theta\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta) - b_1 2\sin\theta\cos\theta\right\} = \frac{1}{r}\left\{a_1\sin 2\theta - b_1\sin 2\theta\right\} = -\frac{-a_1 + b_1}{r}\sin 2\theta$

Pod jakimi warunkami

~~[illegible]~~ rozkład prędkości np. w otoczeniu krawędzi

będzie niezależnym od rodzaju ruchu w odległości

Albo pod jakimi warunkami można znaleźć obszar dostatecznie mały koło krawędzi ~~[illegible]~~ taki że

w ~~[illegible]~~ nim ruch odbywać się będzie w sposób $u = \sqrt{r}\dots$ $v = \sqrt{r}\dots$?

$$\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 \psi = 0$$

$$\nabla^2\left[\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi\right] = 0 \qquad \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\left[\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right]\psi = \varphi(xyzt)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_1 = 0$$

jeśli się ψ_2 tak oznaczy że: → $\nu \nabla^2 \psi_2 = \varphi(xyzt)$

to znaczy że: $(\nabla^2)\nabla^2\psi_2 = 0$

część funkcyi ψ_1 zawiera; tak jest (w ogólnym razie) wszelkie ψ_3 zadość czyniące warunkowi $\nabla^2\psi_3 = 0$

więc dodanie $\psi_1 + \psi_3$ nie ma sensu

tylko że tutaj ψ_2 także od czasu może zależeć!

Co prawda, że każdy ruch stacyonarny $\nabla^2\nabla^2\psi_2 = 0$ można sobie wyobrazić po prostu jako graniczny przypadek drgania odpowiedniego (z czasem drgania i amplitudą nieskończoną), więc jako limes drgania koło równowagi, zatem jako limes rozwiązania rodzaju

[illegible]

$\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_1 = 0$ [bez ψ_2

zatem można ogólnie otrzymać ψ przez superpozycję $\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_1 = 0$ i [innego] $\lim \psi_1^*$

N.p. kula drgająca w X i równocześnie postępowo się unosząca w X

[to mogłoby być sprzeczające kuli odbywającej podwójny ruch wahania w X z amplitudą a, T_1 / b, T_2]

Czy to nie dowodzi że równanie 4 rzędu się sprowadzi na równanie 2go rzędu?

~~Ruch potencyalny zmienny~~

~~$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u$~~

~~$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -p$~~

$\Delta\varphi = 0$ W granicznym przypadku gdzie $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ mamy φ potencyalne, ale ponieważ przylegamy do ścian przeto $\varphi = 0$; z drugiej strony jednak robimy amplitudę ∞

$x+\xi = r\cos\varphi \quad = \frac{y}{\operatorname{tg}\varphi}$ $\qquad d\xi = \frac{y}{\cos\varphi}\, d\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r = \frac{y}{\sin\varphi}$

$V = y^3 \int \sqrt{\frac{\frac{y}{\operatorname{tg}\varphi} - x \quad \frac{y}{\cos\varphi}\, d\varphi \sin^4\varphi}{y^4}}$ $\qquad \sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$

$= 1 - \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}$

$\frac{1}{z} = u \qquad -\frac{dz}{z^2} = du \qquad dz = -\frac{du}{u^2}$ $\qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$

$\operatorname{tg}\varphi = z$

$= \int \sqrt{\frac{y}{z} - x}\; dz \left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 = \int \sqrt{y\alpha - x}\; \frac{du}{u^2} \left(\frac{1}{1+u^2}\right)^2$ $\qquad \frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{x^2} = -\frac{\operatorname{tg}\theta}{x}$

$f = \frac{1}{\alpha}$

$\psi = \frac{1}{i}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right) = \sin 2\theta - 2\theta$

$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2(\cos 2\theta - 1)\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta ...}{r ...}\cos 2\theta$

$... \sin^2\theta \frac{\cos\theta}{r}$

$\psi = \int (\sin 2\theta - 2\theta)\sqrt{\xi}\, d\xi = 2\int \frac{(x+\xi)\, y}{r^2} - \operatorname{arctg}$

$\psi = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha)$

$u = \frac{1}{i}\left[f(\beta) - f(\alpha) + \beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)\right] \quad \Big| + Rg \quad + Ih$

$v = f(\beta) + f(\alpha) + \beta f(\alpha) + \alpha f(\beta) \quad \Big| - Ig \quad + Rh$

$f^* = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{i}$

$f = \sqrt{1-\alpha^2} = \sqrt{r_1 r_2}\left[\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$

$f' = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = -\frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\right.$

$u = \sqrt{r_1 r_2}\left[-\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right] + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\left[-\sqrt{r_1 r_2} + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\right]$

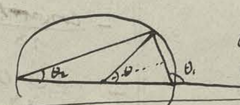
$v = \sqrt{r_1 r_2} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\left[\sqrt{r_1 r_2} - \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\right]$

Ściana: $r^2 = r_1 r_2$ niemożliwe oprócz $r = \infty$

punkty ± 1 : $u = v = \infty$

~~$r \sin\theta = y$~~

~~$r \cos\theta = \ldots + r_1 \cos\theta_1 = \ldots r_2 \cos\theta_2 - 1$~~



$\theta_1 = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$

$\theta_2 = \frac{\theta}{2}$

$\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$

$f = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - i \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]$

$\beta f'(\alpha) = \frac{+\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}^3} = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}^3}\left[\cos\frac{3(\theta_1+\theta_2)}{2} - i \sin\frac{3(\theta_1+\theta_2)}{2}\right]$

$u = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}^3} \sin\frac{3(\theta_1+\theta_2)}{2}$

$v = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}^3} \cos\frac{3(\theta_1+\theta_2)}{2}$

$f = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}\left[\cos\frac{\theta_2-\theta_1}{2} + i \sin\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right]$

$f' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \cdot \left[\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1+\alpha}{(1-\alpha)^2}\right] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \cdot \frac{2}{(1-\alpha)^2} = \frac{1}{(1-\alpha)\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{1}{r_1\sqrt{r_1 r_2}}\left[\cos\left(\theta_1 + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - i \sin\left(\theta_1 + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]$

Jeśli $f(\alpha)$ ma punkt ~~osobliwy~~ nieskończony w skończoności, to także $f(\alpha)$ musi tam mieć nieskończoność. (Durège p. 130)

Zatem u, v muszą tam być ∞

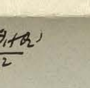
Więc jeśli ψ skończone (w obszarze do koła R) to można wyrazić $f(\alpha)$ w tym obszarze dające się rozwinąć

$f(\alpha) = a + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2} + \quad - \frac{a_2}{\alpha^2}$

$+ b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots - b_n\alpha^2$ [! Np. $f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$!]

~~$\sqrt{1-\alpha^2} = \ldots$~~

$\sqrt{\alpha^2 - 1} = \alpha\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} = \alpha\left[1 - \frac{1}{2\alpha^2} + \ldots\right]$

Czy jeśli są punkty rozgałęzienia  można rozwinąć funkcję ↑ poza koło

Np. $\operatorname{arctg}\alpha =$

$R = (n-1)\, r^n \cos(n-1)\theta$.

$S = -(n+1)\, r^n \sin(n-1)\theta$

$\frac{dS}{dr} + \frac{S}{r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial (Rr)}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(Sr) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{R}{r}\right)$

$\left[-(n+1)^2 \sin(n-1)\theta - (n-1)^2 \sin(n-1)\theta\right] r^{n-1} = -(n^2+1) \sin(n-1)\theta \cdot r^{n-1}$

$= \frac{\partial^4}{\ldots}$

$= -(1+n^2)\; \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{i}$

| $-r^n \cos(n+1)\theta$
| $+r^n \sin(n+1)\theta$
| $(n^2)\sin(n+1)\theta - (n+1) r^n \ldots$

Dla ujemnych n:

$R = -\frac{(n+1)}{r^n} \cos(n+1)\theta$ || $-\frac{\cos(n+1)\theta}{r^n}$

$S = -\frac{(n-1)}{r^n} \sin(n+1)\theta$ || $-\frac{\sin(n-1)\theta}{r^n}$

Dla ściany X ($\theta=0$):

$-a_0 - b_0 = 0$

$-2a_1 - b_1 = 0$

$-3a_2 - b_2 = 0$

$-4a_3 - b_3 = 0$

wszystkie a dowolne

Dla ściany Y ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

$-a_0 \cos\frac{\pi}{2} - b_0 \cos(-\frac{\pi}{2}) - \frac{2a_1}{r}\cos\pi - \frac{b_1}{r}$

$-\frac{3a_2}{r^2}\cos\frac{3\pi}{2} - \frac{b_2}{r^2}\cos\frac{\pi}{2}$

$-\frac{4a_3}{r^3}\cos\frac{4\pi}{2} - \frac{b_3}{r^3}\cos\frac{2\pi}{2}$

$= \frac{2a_1 - b_1}{r} - \frac{4a_3 - b_3}{r^3} + \frac{6a_5 - b_5}{r^5} \ldots = 0$

sprzeczne z

Dla ściany $-X$ ($\theta=\pi$):

$-a_0 \cos\pi - b_0\cos(-\pi)$ $= a_0 + b_0 = 0$

$-2\frac{a_1}{r}\cos 2\pi - \frac{b_1}{r}$ $= -\frac{2a_1 + b_1}{r} = 0$

$-3\frac{a_2}{r^2}\cos 3\pi - \frac{b_2}{r^2}\cos\pi$ $+\frac{3a_2+b_2}{r^2} = 0$

$-4\frac{a_3}{r^3}\cos 4\pi - \frac{b_3}{r^3}\cos 2\pi$ $-\frac{4a_3+b_3}{r^3} = 0$

tosamo co poprzednie

więc ogólnie $b_n = -(n+1)a_n$

$R = \sum \frac{1}{r^n}\left[-a_n(n+1)\cos(n+1)\theta + a_n(n+1)\cos(n-1)\theta\right] = \sum \frac{a_n}{r^n}(n+1)\left[\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta\right] = \sum \frac{a_n(n+1)}{r^n}\, 2\sin n\theta \sin\theta$

$S = \sum \frac{1}{r^n}\left[-a_n(n-1)\sin(n+1)\theta + a_n(n+1)\sin(n-1)\theta\right] = \sum \frac{a_n}{r^n}\left[n\left[\sin(n-1)\theta - \sin(n+1)\theta\right] + \sin \ldots + \ldots\right]$

$= \sum 2\frac{a_n}{r^n}\left[\sin n\theta \cos\theta - n\cos n\theta \sin\theta\right]$

$u = \sum \frac{2a_n}{r^n}\left[n(\sin n\theta \cos\theta \cos\theta \pm \cos n\theta \sin\theta \sin\theta)\right]$

$= \sum \frac{a_n}{r^n}\left[n\sin(n+2)\theta + \sin(n-2)\theta\right]$

$v = \sum \frac{2a_n}{r^n}\left[\sin n\theta + n\sin\theta \sin(n+1)\theta\right]$?

$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha f(\beta) \mp \beta f(\alpha) + g(\alpha) \mp g(\beta)\right]$

pod zastrzeżeniem że $f(\alpha)$ funkcja algeb.

$f(\alpha) = \alpha^n$

$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\beta^n - \beta\alpha^n\right] + \cdots \quad = \frac{\alpha\beta}{i}$

$-\frac{u}{k} = +\frac{\partial\psi}{\partial y} = \alpha^n + \beta^n - n(\beta\alpha^{n-1} + \alpha\beta^{n-1}) \quad \Big| \; + mk(\alpha^{m-1} + \beta^{m-1})$

$\frac{v}{k} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{i}\left[\beta^n - \alpha^n + n(\alpha\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta)\right. \quad \Big| \; + mk\left(\frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{i}\right)\Big]$

ważne dla każdego n z wyjątkiem $n = 0$

$-u = r^n \cos n\theta - n r^n \cos(n-2)\theta \quad \Big| \; + r^n \cos n\theta$

$v = -r^n \sin n\theta + n r^n \sin(n-2)\theta \quad \Big| \; + r^n \sin n\theta$

$\sin n\theta \sin\theta - \cos n\theta \cos\theta = -\cos(n+1)\theta$

$u\cos\theta + v\sin\theta = -r^n(\cos n\theta\cos\theta + \sin n\theta \sin\theta) + n r^n(\cos(n-2)\theta\cos\theta + \sin(n-2)\theta\sin\theta) =$

$= r^n\left[\cos(n+1)\theta + n\cos(n-1)\theta\right] = r^n(n-1)\cos(n-1)\theta$

$+ r^n \cos n\theta$

$v\cos\theta - u\sin\theta = r^n\left[(+\cos n\theta\sin\theta - \sin n\theta\cos\theta) + n(\cos(n-2)\theta\sin\theta - \sin(n-2)\theta\cos\theta)\right] =$

$= r^n\left[-\sin(n+1)\theta - n\sin(n-1)\theta\right] = -r^n(n+1)\sin(n-1)\theta$

$+ r^n \sin n\theta$

$\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta \sin\theta = \sin(n+1)\theta$

Ogólnie:

$R = \sum a_n r^n\left[\cos(n+1)\theta - n\cos(n-1)\theta\right] + \sum b_n r^n \cos n\theta$

$S = -\sum a_n r^n\left[\sin(n+1)\theta + n\sin(n-1)\theta\right] + \sum b_n r^n \sin n\theta$

~~Dla ściany Y=0~~ Jeśli $\lim_{\infty}\left\{\begin{matrix}R\\S\end{matrix}\right. = 0$:

$\frac{a_0}{r}\cos\theta + b_0$

$+ \frac{a_1}{r} + \left(\frac{a_1}{r}\cos 2\theta\right) + \frac{b_1}{r}\cos\theta$

$+ \frac{a_2}{r^2}\cos\theta + 2\frac{a_2}{r^2}\cos 3\theta + \frac{b_2}{r^2}\cos 2\theta$

$\frac{a_3}{r^3}\cos 2\theta + 3\frac{a_3}{r^3}\cos 4\theta + \frac{b_3}{r^3}\cos 3\theta$

$+ b_0 + a_0\cos\theta + \frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2}\cos\theta + \frac{b_1}{r}\cos\theta$

$R = \sum_0^\infty\left\{\frac{a_n}{r^n}\left[\cos(n-1)\theta + n\cos(n+1)\theta\right] + \frac{b_n}{r^n}\cos n\theta\right\} = \sum_{n=+2}^{n=+\infty}\cos n\theta\left[\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{a_{n-1}(n-1)}{r^{n-1}} + \frac{b_n}{r^n}\right]$

$S = \sum_0^\infty\left\{\frac{a_n}{r^n}\left[\sin(n-1)\theta - n\sin(n+1)\theta\right] - \frac{b_n}{r^n}\sin n\theta\right\} = \sum \sin n\theta\left[\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} - \frac{(n-1)a_{n-1}}{r^{n-1}} - \frac{b_n}{r^n}\right]$

$- a_0\sin\theta - \frac{b_1}{r}\sin\theta + \frac{a_2}{r^2}\sin\theta$

Dla ściany $Y=0$:

$\sum \frac{a_n^{(1+n)} + b_n}{r^n} = 0 \qquad$ ~~$a_n = -b_n$~~ $\qquad b_n = -(1+n)a_n$

wszystkie a_n dowolne, wszystkie b_n dane

$R = \sum_0^\infty \frac{a_n}{r^n}\left\{\cos(n-1)\theta + n\cos(n+1)\theta - \cos n\theta - n\cos n\theta\right\} = \sum_0^\infty \frac{2a_n}{r^n}\left\{\sin\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\theta\sin\frac{\theta}{2} + n\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\theta\sin\frac{\theta}{2}\right\}$

$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$

$v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$

$S =$

Dla ściany $X=0$: $\quad \theta = \frac{\pi}{2}$

$n=1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$\frac{a_n}{r^n}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + n\cos\left(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{a_n}{r^n}\left[1-n, \quad 0, \quad -1+n, \quad 0 \; \ldots\right]$

$= \frac{a_1}{r}(1-1) - \frac{a_3}{r^3}(1-3) + \frac{a_5}{r^5}(1-5) - \frac{a_7}{r^7}(1-7) + \cdots$

$= \frac{2a_3}{r^3} - \frac{4a_5}{r^5} + \frac{6a_7}{r^7} - \frac{8a_9}{r^9} + b_0 - \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_4}{r^4} = 0$

$a_3 = a_5 = \cdots = 0 \qquad a_1$ dowolny

$$R = \sum_1^\infty \cos n\theta \left[-\frac{b_{n+1}}{r^{n+1}} - n\frac{a_{n-1}}{r^{n-1}} \right] - \frac{b_1}{r} - b_0 \cos\theta$$

$$S = \sum_1^\infty \sin n\theta \left[-\frac{b_{n+1}}{r^{n+1}} - (n-2)\frac{a_{n-1}}{r^{n-1}} \right] + b_0 \sin\theta$$

$b_0 = -a_0$

$b_1 = 0$ $\qquad -b_0 - \frac{b_2}{r^2} - a_0 = 0$ $\qquad b_0 - \frac{b_2}{r^2} + a_0 = 0$

$-\frac{b_3}{r^3} - 2\frac{a_1}{r} = 0$ $\qquad -\frac{b_3}{r^3} = 0$

$-\frac{b_4}{r^4} - 3\frac{a_2}{r^2} = 0$ $\qquad -\frac{b_4}{r^4} - \frac{a_2}{r^2} = 0$

$b_2 = -a_0 c^2$

$R = -a_0 \cos\theta + a_0 \frac{c^2}{r^2} \cos\theta \qquad = a_0 \cos\theta \left[-1 + \frac{c^2}{r^2} \right]$

$S = a_0 \sin\theta + a_0 \frac{c^2}{r^2} \sin\theta \qquad = a_0 \sin\theta \left[1 + \frac{c^2}{r^2} \right]$

$u = R\cos\theta - S\sin\theta = -a_0 + a_0 \frac{c^2}{r^2} \cos 2\theta$

$v = R\sin\theta + S\cos\theta =$

$u = a_0 \cos 2\theta \left[-1 + \frac{c^2}{r^2} \right]$

$v = a_0 \left[-1 + \frac{c^2}{r^2} \right] \sin 2\theta$

$\frac{v}{u} = \operatorname{tg} 2\theta$

$\left[-1 + \frac{c^2}{\alpha\beta} \right] \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right)$

$\left[-1 + \frac{c^2}{\alpha\beta} \right] \frac{\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right]}{i}$

$u = (x^2 - y^2)\left(\frac{c^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right)$

$v = 2xy \left(\frac{c^2}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right)$

$u = -\left[\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right] + c^2 \left[\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2} \right]$

$v = -\frac{\left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} \right]}{i} + c^2 \frac{\left[\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right]}{i}$

$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{2c^2}{\alpha^3}$ $\qquad i\frac{\partial v}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{2c^2}{\alpha^3}$

$\frac{\partial u}{\partial \beta} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{2c^2}{\beta^3}$ $\qquad i\frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{1}{\alpha} - \frac{2c^2}{\beta^3}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\beta}{\alpha^2} - 2c^2\left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} \right)$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right) - \left(\frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{\beta^2} \right) + 2c^2\left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} \right)$

$R = -a_0 \cos\theta + b_0 \cos\theta = 0$

$S = +a_0 \sin\theta - a_0 \sin\theta = 0$

S3

$$V = 2y^3 \int_{-\infty}^{0} \frac{z^2\,dz}{[\underbrace{y^2 + (x+z^2)^2}_{U}]^2} = 2y^3 \int_{-\infty}^{0} \frac{z^2\,dz}{(y^2 + x^2 + 2xz^2 + z^4)^2}$$

$$\lambda = 4(y^2+x^2) - 4x^2 = 4y^2$$

$$= \left.\frac{2xz + 2z^3}{8y^2 U}\right|_{-\infty}^{0} - \frac{2x}{8y^2}\int \frac{dx}{U} + \frac{1}{4y^2}\int \frac{x^2\,dx}{U}$$

$$k = \sqrt{2\sqrt{y^2+x^2} - 2x}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{U} = \frac{1}{2\sqrt{a(2b+k^2)}}\,\pi = \frac{\pi}{2\sqrt{(y^2+x^2)(2x + 2\sqrt{y^2+x^2})}}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2\,dx}{U} = \frac{1}{2\sqrt{c(2b+k^2)}}\,\pi = \frac{\pi}{2\sqrt{2x + 2\sqrt{y^2+x^2}}}$$

$$V = \left[-\frac{xy}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{y^2+x^2}} + \frac{y}{4}\right]\frac{\pi}{\sqrt{2(x+\sqrt{y^2+x^2})}}$$

$$= \frac{\pi y}{4\sqrt{2}\sqrt{x+r}}\left[1 - \frac{x}{r}\right] = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\sqrt{r}\,\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}\left[1-\cos\theta\right]$$

$$= \frac{\pi\sqrt{r}}{4\sqrt{2}}\,\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\;2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}\sin^3\frac{\theta}{2}$$

$u - iv$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)^2 + 2\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = f''(\alpha) + f''(\beta)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{i[f''(\alpha) - f''(\beta)]}{i}$$

$$-\frac{f''(\alpha) + f''(\beta)}{i}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = i\,(f''(\alpha) - f''(\beta))$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} =$$

$$-i\frac{\partial\xi}{\partial x} = if'$$

$$i\frac{\partial\xi}{\partial x} = if'$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = +i\frac{\partial\xi}{\partial y}$$

$$V = y^3 \int_{-\infty}^{0} \frac{f(\xi)}{[y^2+(x+\xi)^2]^2} d\xi$$

$$U = y^2 \int_{-\infty}^{0} \frac{f(\xi)(x+\xi)}{[y^2+(x+\xi)^2]^2} d\xi$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y^2 \int \frac{f(\xi)\, d\xi}{[\quad]^2} \quad \frac{1 - 4(x+\xi)^2}{[\quad]}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = y^2 \int \frac{f(\xi)\, d\xi}{[\quad]^2} \left[3 \quad - \frac{4y^2}{[\quad]}\right]$$

$p + i\varphi = f_1(x+iy) \sin \alpha t + f_2(x+iy) \cos 2\alpha t + \ldots$

$p = \varphi_1(xy) \cos \alpha t + \varphi_2(xy) \cos 2\alpha t + \ldots$

$\varphi = \chi_1(xy) \sin \alpha t + \chi_2(xy) \sin 2\alpha t + \ldots$ $\quad = \nu . \nabla^2 \psi_2$ $\quad \psi = \psi_1 + \psi_2$

$\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi_1 = 0$

$\psi_2 = \cos \alpha t . \text{pot}\, \chi_1 + \cos 2\alpha t . \text{pot}\, \chi_2 + \ldots$

~~$\psi_1 = \Psi_1 \cos \alpha t + \Psi_2 \cos 2\alpha t + \ldots$~~

~~$\nu \nabla^2 \psi_1 = \Psi_1$~~

$\nabla^2 \Psi_1$ ~~$\sin t$~~ $= \Phi_2$

$\nabla^2 \Psi_1 \quad - - \Phi_1$

$\psi_1 = \Psi_1 \cos \alpha t + \Psi_2 \cos 2\alpha t + \ldots$

$+ \Phi_1 \sin \alpha t + \Phi_2 \sin 2\alpha t + \ldots$

$\nu \nabla^2 \Psi_1 = - \Phi_1 \qquad \nabla^2 (\nabla^2 \Phi_1) = - \Phi_1$ etc.

etc.

$\nu \nabla^2 \Phi_1 = \Psi_1$

$\varphi = \cos \alpha t \left[\text{pot}\, \chi_1 + \Psi_1\right] + \cos 2\alpha t \left[\text{pot}\, \chi_2 + \Psi_2\right] + - -$

$+ \sin \alpha t \; \Phi_1 \qquad + \sin 2\alpha t \; \Phi_2 \qquad -$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v$$

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \nu \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\nabla^2 \psi = -\frac{1}{\nu}\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$p + i\varphi = fn(x+iy, t)$$

W rzeczywistości powinno być:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\Delta p = 0$$

$$p = fn(x, y, z, t)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial(\nu \Delta^2 \psi_2)}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad \Delta \psi = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nu \nabla^2 \psi\right)}_{=\Phi} \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nu \nabla^2 \psi\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}\end{aligned}\right\} \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \Phi = \nu \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \qquad \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial t} = f(\alpha) + f(\beta)$$

$$\Phi = f(\alpha) + f(\beta)$$

~~Stokes Lamb~~: Stokes Lamb.

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

$$\nabla^2\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)(\psi_1 + \psi_2) = 0 \qquad (\nabla^2)\psi_1 = 0$$

$$\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_2 = 0$$

jednak nie będzie się miało najogólniejszego możliwego rozwiązania bo to dopiero $\left(\nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2 \psi_2 = 0$

$$X = v = x\chi - z\varphi$$

$p \; q \; r$

$\varphi \; \chi$

$$L = \sum (X z - Z y)$$

$$= \sum v z \mu = \sum z x \chi - z^2 \varphi$$

$$= r \sum z x - p \sum z^2$$

$$- r \sum y z + q \int z^2$$

$z = x \sin x \qquad \frac{dz}{dx} = \sin x + x \cos x \qquad \lim_{x=0} \frac{dz}{dx} \; ?$

$\lim_{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x} = 0 \qquad \frac{d}{dx} = \frac{z - \dots}{x^2}$

~~Cry ——— jedyne rozwiązanie jak musi zniknąć μ_∞~~

~~jak wolno p … przy ścianie~~

~~μ_{xx} w $d\mathcal{S}$ $\quad \int r \, d\varphi \; u \left(p + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ musi $= 0$ dla $\lim r = \infty$~~

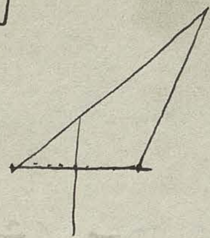
~~w rozwiązaniu $r^n \quad n = \frac{1}{2}$~~

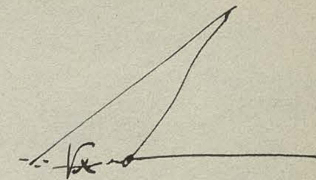
[illegible]

$$v_0 = -\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x_0^2}$$

$$u = \frac{y^2 x}{r^3}$$

$$v = \frac{y^3}{r^4}$$





$$V = y^3 \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[y^2+(x-\xi)^2]^2}\, d\xi$$

$$\int \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{[y^2+(x-\xi)^2]^2}\, d\xi = -\frac{1}{2y}\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{y^2+(x-\xi)^2}\, d\xi\right]$$

~~$\frac{1}{2y}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{y+i(x-\xi)} + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{y-i(x-\xi)}\right)$~~

$$V = y^3 \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\xi}}{[y^2+(x+\xi)^2]^2}\, d\xi = 2y^3 \int_{-\infty}^{0} \frac{z^2\, dz}{[y^2+(x+z^2)^2]^2}$$

$$\sqrt{\xi} = z$$

$$\xi = z^2$$

$$d\xi = 2z\, dz$$

$$= y^2 \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{0} \frac{z^2\, dz}{y^2+(x+z^2)^2}$$

~~$y^2 + x^2 + 2xz^2 + z^4$~~

$$\int \frac{-1 + \frac{ix}{y}}{y+i(x+z^2)} + \frac{1+\frac{ix}{y}}{y-i(x+z^2)}$$

$ix + iz^2$ $\quad +ix + \frac{x}{y}(x+z^2)$ $\quad +ix + \frac{x}{y}(x+z^2)$

$$= \frac{1}{y}\int \frac{iy - x}{iy + x + z^2} - \frac{iy+x}{iy - x + z^2}$$

$$= \frac{1}{y}\left[\frac{iy-x}{\sqrt{iy+x}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{iy+x}} - \frac{iy+x}{\sqrt{iy-x}} \operatorname{tg} \ldots\right.$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\, d\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$f(\alpha) = \sqrt{\alpha(1-\alpha)}$$

$$u = -y \sin\left(\frac{\theta_1-\theta}{2}\right)\left[\sqrt{\frac{r_1}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r_1}}\right]$$

$$v = -\sqrt{r r_1}\,\sin\frac{\theta_1+\theta}{2} + \frac{y}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta_1-\theta}{2}\left[\sqrt{\frac{r_1}{r}} - \sqrt{\frac{r}{r_1}}\right]$$

$$p = \cos\frac{\theta_1-\theta}{2}\left[\sqrt{\frac{r_1}{r}} - \sqrt{\frac{r}{r_1}}\right]$$

$$\alpha\sqrt{1-\alpha^2} \qquad \sqrt{1-\alpha^2} - \frac{2\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\left\{\sqrt{r_1 r_2}\,\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right\}$$

$$r\sqrt{r_1 r_2}\,\sin\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + y\sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$
$$-\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\left(2\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r}\left\{\cos\left[\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta\right] + i\sin\left[\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta\right]\right\}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\left\{-\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right\}$$
$$-\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r^2}\left\{\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-2\theta\right) + i\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-2\theta\right)\right\}$$

$$u = y\left\{-\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r^2}\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-2\theta\right)\right\}$$

$$v = -\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r}\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\theta\right) + y\left\{\frac{-1}{\sqrt{r_1 r_2}}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} - \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r^2}\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-2\theta\right)\right\}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta = 0 \qquad u = v = 0$$

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \frac{\pi}{2} = \theta \qquad u = y\left(-\frac{1}{r_1} - \frac{r_1}{r^2}\right) = -\frac{y\,(y^2-y^2-1)}{y^2\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{y\sqrt{1+y^2}}$$

$$v = 0$$

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{1}{r\sqrt{r_1 r_2}}\left[\cos\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - i\sin\left(\theta + \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{\alpha^2\sqrt{1-\alpha^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}^{\,3}}$$

Przyjmujemy $f = \alpha^n \qquad g(\alpha) = k\alpha^m$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\beta^n - \beta\alpha^n + k(\alpha^m - \beta^m)\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{1}{i}\left[\beta^n - n\beta\alpha^{n-1} + mk\alpha^{m-1}\right]$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{1}{i}\left[n\alpha\beta^{n-1} - \alpha^n - mk\beta^{m-1}\right]$$

$$-\alpha^n\beta^n - n^2\alpha^n\beta^n - m^2k^2\alpha^{m-1}\beta^{m-1} + n\alpha\beta^{2n-1} + nmk\alpha^{n-1}\beta^m - mk\alpha^{m+n-1}$$

$$+n\alpha^{2n-1}\beta + mnk\alpha^m\beta^{n-1} - mk\beta^{n+m-1} = 0$$

$$-(\alpha\beta)^n(1+n^2) - m^2k^2(\alpha\beta)^{m-1} + n\alpha\beta(\alpha^{2n-2}+\beta^{2n-2}) + mnk(\alpha\beta)^m(\alpha^{n-m-1}+\beta^{n-m-1})$$

$$-mk(\alpha^{m+n-1}+\beta^{m+n-1}) = 0$$

$$-(1+n^2)r^{2n} - m^2k^2r^{2m-2} + 2n\, r^{2n} \cos(2n-2)\theta + 2mnk\, r^{n+m-1} \cos(n-m-1)\theta$$

$$-2mk\, r^{m+n-1}\cos(m+n-1)\theta = 0$$

$$r^{2n}\left[(1+n^2) + 2n\cos(2n-2)\theta\right] - m^2k^2r^{2m-2} + 2mk\,r^{m+n-1}\left[n\cos(n-m-1)\theta - \cos(m+n-1)\theta\right] = 0$$

$n = 1 \qquad k = \frac{1}{6} \qquad m = 2$

$$r^2\left[2+2\right] - \frac{4}{6^2}r^2 + \frac{4}{6}r^2\left[\cos 2\theta - \right] = 0$$

(sztuczne) $\quad r = 0 \qquad r = 0$

$$\left[(1+n^2) + 2n\cos(2n-2)\theta\right] - m^2k^2r^{2m-2n-2} + 2mk\,r^{m-n-1}\left[n\cos(n-m-1)\theta - \cos(m+n-1)\theta\right] = 0$$

$mk\,r^{m-n-1} = R \qquad R^2 - 2R\left[n\cos(n-m-1)\theta - \cos(m+n-1)\theta\right] = \left[1 + n^2 + 2n\cos(2n-2)\theta\right]$

pod przyjęciem formy $\varphi = \frac{1}{2}(\quad - \quad)$

zamknięte do koła jeśli dla wszystkich małych θ:

$$[n\cos(n-m-1)\theta - \cos(m+n-1)\theta]^2 + 2n\cos(2n-2)\theta > 1+n^2$$

czyli:

$$[\nu\cos(\nu-m)\theta + 2\sin\nu\theta\sin m\theta]^2 > \nu^2 + 4(\nu+1)\sin^2\nu\theta$$

~~$[\nu\cos\nu\theta\cos m\theta + (2+\nu)\sin\nu\theta\sin m\theta]^2$~~

$$-\nu^2\sin^2(\nu-m)\theta + 4\sin^2\nu\theta(\sin^2 m\theta - \nu - 1) + 4\nu\sin\nu\theta\sin m\theta\cos(\nu-m)\theta > 0$$

~~$\sin^2\nu\theta($~~

$$4\nu\sin\nu\theta\sin m\theta\cos(\nu-m)\theta > \nu^2\sin^2(\nu-m)\theta + 4\sin^2\nu\theta(\nu+\cos^2 m\theta)$$

N.p. dla bardzo małych θ:

$$4\nu^2 m\theta^2 > \nu^2(\nu-m)^2\theta^2 + 4\nu^2\theta^2(\nu+1)$$

$$4m > (\nu-m)^2 + 4(\nu+1)$$

$$4(m-\nu-1) > (\nu-m)^2$$

$$0 > (\nu-m)^2 - 4(\nu-m) + 4$$

$$0 > [\nu-m-2]^2$$ niemożliwe!

z wyjątkiem $\nu = m+2$, $n = m+3$

$$[n\cos 2\theta - \cos(2n-4)\theta]^2$$

~~$n\cos 2\theta + \cos 2n$~~ $[n\cos\varphi - \cos(n-2)\varphi]^2 + 2n\cos(n-1)\varphi - n^2 - 1 =$

~~$n\cos\varphi - \cos(n-4)\varphi\cos\varphi + \sin$~~

$$n^2\cos^2\varphi + \cos^2(n-2)\varphi - 2n\cos\varphi\cos(n-2)\varphi + 2n\cos(n-1)\varphi - n^2 - 1 =$$

~~$-2n\cos\varphi\cos(n-2)\varphi + 2n\cos(n-2)\varphi\cos\varphi$~~ $- 2n\sin(n-2)\varphi\sin\varphi - n^2\sin^2\varphi - \sin^2(n-2)\varphi$

$$= -[n\sin\varphi + \sin(n-2)\varphi]^2$$

Obydwie zamknięte do koła jeśli: ~~ogólnie dla R postać wygodna raczej dodatnia~~

$$\left[n\cos(n-m-1)\theta - \cos(m+n-1)\theta\right]^2 - (1+n^2) + 2n\cos(2n-2)\theta > 0$$

Np.

$n=2$

$R = m k r^{m-3}$

$$R^2 - 2R\left[2\cos(m-1)\theta - \cos(m+1)\theta\right] = 5+4\cos 2\theta$$

~~m = 2~~ ~~$R^2 - 2R[2\cos\theta + \cos 3\theta$~~

$m=1$ $\quad R^2 - 2R\left[2 - \cos 2\theta\right] = -5+4\cos 2\theta$

$$R = 2+\cos 2\theta \pm \sqrt{-5+4\cos 2\theta + 4 - 4\cos 2\theta + \cos^2 2\theta}$$

$$= 2+\cos 2\theta \pm \sqrt{-1 + \cos^2 2\theta}$$

$$R = 2+\cos 2\theta \pm i\sin 2\theta$$

$f = \alpha^2$

$g = k\alpha$ $\quad \psi = \frac{1}{i}\left[\alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + k(\alpha-\beta)\right] = \frac{\alpha-\beta}{i}\left[k-\alpha\beta\right]$

$$= 2y(k-x^2)$$

$u = -2(k-x^2) + 4y^2$

$v = \quad -4yx$

$u^2+v^2 = 16y^2x^2 + 4(k-x^2)^2 - 16(k-x^2)y^2$

$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = \frac{1}{i}\left[k-\alpha\beta - \beta(\alpha-\beta)\right] = \frac{1}{i}\left[k-2\alpha\beta+\beta^2\right]$

$\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{1}{i}\left[-k+\alpha\beta - \alpha(\alpha-\beta)\right] = \frac{1}{i}\left[-k+2\alpha\beta-\alpha^2\right]$

$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{i} = \frac{4yx}{i}$

$\frac{1}{i}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) = -2\left(k-2\alpha\beta + \frac{\beta^2+\alpha^2}{2}\right) = -2\left(k-2r^2 + \frac{r^2\cos 2\theta}{2}\right)$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial\beta} = \left[\alpha^2\beta^2 + 4\alpha^2\beta^2 + k^2 - 2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) + k(\alpha^2+\beta^2) - 4k\alpha\beta\right]$$

$$= 5\alpha^2\beta^2 + (\alpha^2+\beta^2)(k-2\alpha\beta) - 4k\alpha\beta + k^2$$

$$= x^4 + 8x^2y^2 - 2kx^2 - 4ky^2 + k^2$$

$f = \sqrt[4]{\alpha^2-1}$ $\qquad f' = \frac{\alpha}{2}(\alpha^2-1)^{-3/4}$

$$u = -2\frac{y\,r}{(r_1 r_2)^{3/4}} \sin\left[\theta - 3/4(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$v = -4(r_1 r_2)^{1/4} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{4} + 2\frac{y\,r}{(r_1 r_2)^{3/4}} \cos\left[\theta - 3/4(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$f = (\alpha^2-1)^m$ $\qquad f' = 2m\alpha(\alpha^2-1)^{m-1}$

$$u = -2y\,r\,m(r_1 r_2)^{m-1} \sin\left[\theta + (m-1)(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$v = -(r_1 r_2)^m \sin(\theta_1+\theta_2)m + 2y\,m\,r(r_1 r_2)^{m-1} \cos\left[\theta + (m-1)(\theta_1+\theta_2)\right]$$

~~$u^2+v^2 = (r_1 r_2)^{2m} \sin^2(\theta_1+\theta_2) + 4y^2m^2r^2(r_1 r_2)^{2m-2} - 4ym\,r(r_1 r_2)^{2m-1} \sin(\theta_1+\theta_2)m \cdot \cos\left[\theta+(m-1)(\theta_1+\theta_2)\right]$~~

~~$\sin^2 m(\theta_1+\theta_2) + 4m^2y^2 - 4my$~~

~~$\sin^2 m(\theta_1+\theta_2) + 4m\frac{y^2r^2}{(r_1 r_2)^2} = 4m\frac{y\,r}{r_1 r_2} \sin m(\theta_1+\theta_2) \cos\left[\theta + (m-1)(\theta_1+\theta_2)\right]$~~

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) + g(\alpha) - g(\beta)\right]$$

$$\xi = \frac{1}{i}\left[f'(\beta) - f'(\alpha)\right] \qquad f''(\alpha) + f''(\beta) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -f''(\alpha) - f''(\beta)$$

$$p = f'(\alpha) + f'(\beta)$$

$$\alpha = \varphi(\overbrace{\xi + i\eta}^{\lambda})$$

$$\beta = \varphi(\underbrace{\xi - i\eta}_{\mu})$$

$$p = ~~fff~~ \; f'\varphi(\lambda) + f'\varphi(\mu)$$

$$\psi = \frac{1}{i}\left[\varphi(\lambda)\, f\varphi(\mu) - \varphi(\mu)\, f\varphi(\lambda) + g\,\varphi(\lambda) - g\,\varphi(\mu)\right]$$

Na ścianie ~~…~~ $\xi = \xi_0$: $\psi = 0$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$$

~~$\varphi(\xi_0)\; f\varphi$~~

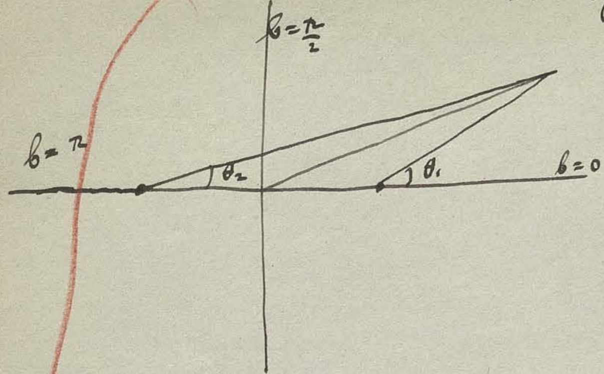
$$\varphi(\xi_0 + i\eta)\, f\varphi(\xi_0 - i\eta) + g\,\varphi(\xi_0 + i\eta) = \varphi(\xi_0 - i\eta)\, f\varphi(\xi_0 + i\eta)$$

φ'

$\alpha = \infty$ $\log(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) = a + ib$

$e^a \cos b = r\cos\theta + \sqrt{r_1 r_2}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$

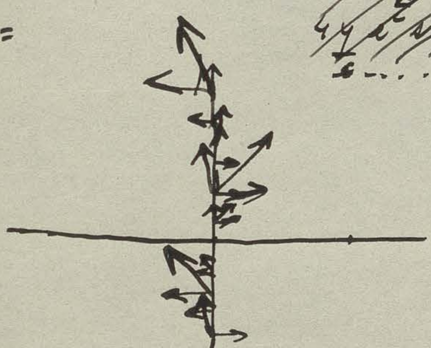
$e^a \sin b = r\sin\theta + \sqrt{r_1 r_2}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$



$f(\alpha) = e^{\frac{\alpha}{c}} = e^{\frac{x}{c}}\left[\cos\frac{y}{c} + i\sin\frac{y}{c}\right]$

$u = -4e^{\frac{x}{c}}\sin\frac{y}{c} - \ldots$

$v =$



$f'(\alpha) = \frac{1}{c}e^{\frac{\alpha}{c}}$

$\psi = \alpha e^{\frac{\beta}{c}} \ldots$

$p = 8e^{-\frac{x}{c}}\cos\frac{y}{c}$

$q = 8e^{-\frac{x}{c}}\cos\frac{y}{c}$

$u = 4e^{-\frac{x}{c}}\sin\frac{y}{c} + 4\frac{y}{c}e^{-\frac{x}{c}}\cos\frac{y}{c}$

$v = \quad 4\frac{y}{c}e^{-\frac{x}{c}}\sin\frac{y}{c}$

$u = 4e^{-\frac{x}{c}}\left(\sin\frac{y}{c} + \frac{y}{c}\cos\frac{y}{c}\right)$

$v = 4e^{-\frac{x}{c}}\left(\quad . \quad \frac{y}{c}\sin\frac{y}{c}\right)$

$f(\beta) + f(\alpha) + g'(\alpha) + g'(\beta) + \alpha f'(\beta) + \beta f'(\alpha)$

$g'(\alpha) = -\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$

$= -\left(\frac{\alpha}{c} + 1\right)e^{\frac{\alpha}{c}}$

~~$g(x) = -(x+c)e^{\frac{x}{c}}$~~

$g(x) = -\int e^{\frac{x}{c}}\left(\frac{x}{c}+1\right)dx = -e^{\frac{x}{c}}(x+c) + \underbrace{\int e^{\frac{x}{c}}dx}_{ce^{\frac{x}{c}}}$

$= -e^{\frac{x}{c}} \cdot x$

$\psi = \alpha e^{\frac{\beta}{c}} + \beta e^{\frac{\alpha}{c}} - \alpha e^{\frac{\alpha}{c}} - \beta e^{\frac{\beta}{c}}$

$= (\alpha - \beta)\left(e^{\frac{\beta}{c}} - e^{\frac{\alpha}{c}}\right) = -4y\,e^{-\frac{x}{c}}\sin\frac{y}{c}$

$\underline{n=0}$ $R = mk\, r^{m-1}$

$R^2 + 2R\cos(m-1)\theta = -1$

$R = \cos(m-1)\theta \pm \sqrt{\cos^2(m-1)\theta - 1}$ · Compl.

$\underline{n=1}$ $R = mk\, r^{m-2}$

$R^2 - \cancel{2R\,[\cos m\theta - \cos m\theta]} = -2 + 2 = 0$

$R = 0$

$\underline{n=2}$ $R = mk\, r^{m-3}$

$R^2 - 2R\left[2\cos(1-m)\theta - \cos(m+1)\theta\right] = -5 + 4\cos 2\theta$

$R = 2\cos(m-1)\theta - \cos(m+1)\theta \pm \sqrt{\left[2\cos(m-1)\theta - \cos(m+1)\theta\right]^2 - 5 + 4\cos 2\theta}$

$= 2(\cos m\theta \cos\theta + \sin m\theta \sin\theta)$

$- \cos m\theta \cos\theta + \sin m\theta \sin\theta$

$R = \cos m\theta\cos\theta + 3\sin m\theta \sin\theta \pm \sqrt{(\qquad)^2 - 5 + 4\cos 2\theta}$

$m=0$ $R = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 5 + 4\cos 2\theta} = \cos\theta \pm \sqrt{\underbrace{5\cos^2\theta - 5}_{-5\sin^2\theta} - 4\sin^2\theta}$ Compl.

$m=1$ $R = \cos^2\theta + 3\sin^2\theta \pm \sqrt{\cos^4\theta + 6\sin^2\theta\cos^2\theta + 9\sin^4\theta - 5 + 4\cos^2 - 4\sin^2}$ (struck through)

$= 1 + 2\sin^2\theta \pm \sqrt{1 + 4\sin^2 + 4\sin^4 - 5 + 4\cos^2 - 4\sin^2}$

$\sqrt{4(\sin^4 + \cos^2 - 1)} = 2\sqrt{\sin^2(\sin^2 - 1)}$ Compl.

$m=2$ ./.

$m=3$ $R^2 - 2R\left[2\cos 2\theta - \cos 4\theta\right] = -5 + 4\cos 2\theta$

$R = 2\cos 2\theta - \cos 4\theta \pm \sqrt{\underbrace{(2\cos 2\theta - \cos 4\theta)^2}_{} - 5 + 4\cos 2\theta}$

rzeczywiste $\overset{=0}{\text{np.}}$ dla $\theta = 0$

$$R^2 - 2R\left[\overset{n-1}{\nu}\cos(\nu-m)\theta + \cos(\nu-m)\theta - \cos(\nu+m)\theta\right] = -(1+n^2) + 2n\cos 2\nu\theta$$

$$= -n^2 - 1 + 2n - 2n(1-\cos 2\nu\theta)$$

$$R^2 - 2R\left[\nu\cos(\nu-m)\theta + 2\sin\nu\theta\sin m\theta\right] = \ldots - 4n\sin^2\nu\theta$$

$$= -\nu^2$$

~~$R^2 - 2R\left[1 + 2\sin^2\theta\right] = -1 - 8\sin^2\theta$~~

~~$\sqrt{1 + \ldots + 4\sin^4 - 1 - 8\sin^2} = \ldots$~~ $] - 3$

~~$R = \nu\cos(\nu-m)\theta + 2\sin\nu$~~

~~$R^2 - 2R\left[\nu(\cos\nu\theta\cos m\theta + \sin\nu\theta\cos m\theta) + 2\sin\nu\theta\sin m\theta\right] = \ldots$~~

~~$(n-1)\cos\nu\theta\cos m\theta + (n+1)\sin\nu\theta\sin m\theta$~~

~~$= n\cos(\nu-m)\theta - \cos(\nu+m)\theta$~~

Np. $n=2$, $m=2$

$$R^2 - 2R\left[\cos\theta + \underbrace{2\sin\theta\sin 2\theta}_{4\sin^2\theta\cos\theta}\right] = -1 - 8\sin^2\theta$$

$$R = \cos\theta\,(1+4\sin^2\theta) \pm \sqrt{-1-8\sin^2\theta + \cos^2\theta(1+8\sin^2\theta) + 16\cos^2\sin^4\theta}$$

$$\frac{2k}{r} = R = \cos\theta(1+4\sin^2\theta) \pm \underbrace{\sqrt{16\cos^2\sin^4 - \sin^2\theta(1+8\sin^2)}}_{\pm\sin\underbrace{\sqrt{16\cos^2\sin^2 - 8\sin^2 - 1}}}$$

$$4k^2 - 4kr(\cos\theta + 4\sin^2\theta\cos\theta) + (1+8\sin^2\theta)r^2 = 0$$

$\theta = 0$: $4k^2 - 4kr + r^2 = 0$

$(2k-r)^2 = 0$

$r = 2k$

$\theta = \frac{\pi}{2}$: $4k^2 - 9r^2 = 0$ $\quad r = \frac{2}{3}k$

$$4k^2(x^2+y^2) - 4kx(x^2+y^2+4y^2) + (x^2+y^2+8y^2)(x^2+y^2) = 0$$

Krzywa 4 stopnia

~~$\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad 4k^2 - 4kr\frac{3\sqrt{2}}{2} + 5r^2 = 0$~~

~~$r^2 - \frac{6\sqrt{2}}{5}kr + \frac{4}{5}k^2 = 0$~~

~~$r = \frac{3\sqrt{2}}{5}k \pm \sqrt{\frac{18}{25}k^2 - \frac{4k^2}{5}}$ img.~~

$\theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad r =$ complex

$f = \alpha^{2/3}$ $\qquad f' = \frac{2}{3}\alpha^{-1/3}$

$u = \frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}} + \frac{\beta}{\sqrt[3]{\alpha}}\right) - (\alpha^{2/3} + \beta^{2/3}) = \frac{2}{3} r^{2/3} \cos\frac{4\theta}{3} - r^{2/3}\cos\frac{2\theta}{3} \quad + r^{2/3}\cos\frac{2\theta}{3}$

$v = \frac{1}{i}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}} - \quad\right) - (\alpha^{2/3} - \beta^{2/3})\right] = \frac{2}{3} r^{2/3} \sin\frac{4\theta}{3} - r^{2/3}\sin\frac{2\theta}{3} \quad - r^{2/3}\sin\frac{2\theta}{3}$

$\frac{2\theta}{3} = 2\pi \qquad \frac{4\theta}{3} = \frac{\pi}{2}$

$\theta = 3\pi \qquad \frac{3\pi}{2}$

$f = \alpha^{3/4}$? $\qquad f'(\alpha) = \frac{3}{4}\alpha^{-1/4}$

$u = 3/4\, r^{3/4} \cos\frac{5\theta}{4} - r^{3/4}\cos\frac{3\theta}{4}$

$v = 3/4\, r^{3/4} \sin\frac{5\theta}{4} - r^{3/4}\sin\frac{3\theta}{4}$

$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$

$v = \frac{\partial\psi}{\partial x}$

$\int\left[(p_{xx}\, l + p_{xy}\, m)\, u + (p_{xy}\, l + p_{yy}\, m)\, v\right] ds$

$= \int p\,(lu + mv) + \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right]^{ul} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)[u m + v l] + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}\cdot v m$

$\mu l\left[2\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]$

$p_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$

$p_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}$

$p_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$

Dla kuli:

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$p_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$p = +\frac{3}{2}\mu U_a \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{9}{2} U_a \frac{xyz}{r^5}$$

$$w = -\frac{3}{4}\frac{U_a}{r^3} xz \left(~~1 - \frac{a^2}{r^2}~~\right)$$

$$v = -\frac{3}{4}\frac{U_a}{r^3} xy$$

żeby mógł istnieć ruch z prędkością $\lim_\infty \frac{u}{v}$ = skończone } musi być $\lim_\infty \frac{p_{xx}}{p_{xy}} \geq \frac{1}{r^2}$

$\lim_\infty \frac{\xi}{v} = 0$

~~[illegible]~~

w szczególności ... — $> \frac{1}{r}$

jeśli skończony ruch:

const $\equiv \lim_\infty (p = f'(\alpha) + f'(\beta)) \quad > \frac{1}{r}$

$\lim_\infty (\zeta = f(\alpha) - f(\beta)) \quad = 0$

(czy także dla nieskończ. obszaru?)

$$\iint \Phi \, dx\,dy = \iint \zeta^2 \, dx\,dy$$

zatem w ogólności $\lim_\infty \zeta \equiv \frac{1}{\sqrt{r}}$

$f(\alpha)$ nie może mieć punktów ~~istotnie~~ osobliwych (z reguły) w ∞, ~~[illegible]~~ ponieważ $p + i\zeta <$ const

(w razie $\lim \zeta = \infty$)

zatem w każdym razie f istnieje obszar $\equiv \overset{\infty}{>} R$ gdzie $f(\alpha) = a_0 + \frac{a_1}{\alpha} + \frac{a_2}{\alpha^2} + \dots$

Jeżeli wszędzie tylko nieistotne punkty osobliwe to

$$0 < f'(\alpha) < \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$r < f(\alpha) < \sqrt{r}$$

$\psi = \sin\theta \cdot f_1(r) + f_2(r)\sin 2\theta + f_3(r)\sin 3\theta + \dots \; f_n(r)\sin n\theta + \dots$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$\Delta^2\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \cdot \left[\frac{\partial^2 f_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} f_n\right]$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}\right]^2 f_n = 0$$

pro $n=1$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{f}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(f r)}{\partial r}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} f r = c$$

$$\frac{\partial}{\partial r} f r = c r$$

$$f r = c\frac{r^2}{2} + a$$

$$f = c\frac{r}{2} + \frac{a}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(f r)\right]$$

$$\frac{c r^2}{2} + a = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} f(r)$$

$$\frac{c r^3}{2} + a r + b = f r$$

$$\frac{c r^3}{2} + a r \lg r = \frac{\partial}{\partial r} f(r)$$

$$\frac{c r^4}{8} + b + \frac{a}{2} r^2 \lg r + d r^2 = f r$$

$$f = c r^3 + \frac{b}{r} + d \cdot r + a r \lg r$$

$$f(r) = \frac{a}{r} + b r + c r \lg r + d r^3$$

$$\frac{df}{dr} = -\frac{a}{r^2} + b + c + c\lg r + 3 d r^2$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{2a}{r^3} + \frac{c}{r} + 6 d r$$

$$-\frac{2a}{r^3} + \frac{2\lg r}{r} + \frac{b + c}{r} + 2 d r$$

$$-\frac{2c}{r^3} + 8\frac{d}{r}$$

$$+\frac{1}{r}\left(-\frac{2c}{r^3} + 8d\right)$$

$$\frac{4c}{r^3}$$

$$f = e^{\int^r z\,dr}$$

$$f' = z f$$

$$f'' = \left(\frac{dz}{dr} + z^2\right) f$$

$$\frac{dz}{dr} + z^2 + \frac{z}{r} - \frac{n^2}{r^2} = 0$$

$$z = \frac{n}{r} \qquad -\frac{n}{r^2} + \frac{n^2}{r^2} + \frac{n}{r^2} - \frac{n^2}{r^2} = 0$$

partik. ∫.

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{n^2}{r^2}\right] f = F$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{n^2}{r}\right] f = r F$$

$$z = \frac{n}{r} + y$$

$$f = e^{\int^r \left[\frac{n}{r} - \frac{1}{\frac{r}{2n} + c r^{2n+1}}\right] dr}$$

$$\frac{dy}{dr} + \frac{2ny}{r} + y^2 + \frac{y}{r} = 0$$

$$\frac{dy}{dr} + y^2 + \frac{(2n+1)}{r} y = 0$$

$$y^{-1} = -1\, e^{\int^r \frac{2n+1}{r} dr}\left[C - \int e^{-\int^r \frac{2n+1}{r} dr} dr\right]$$

$$\frac{1}{y} = -e^{(2n+1)\lg r}\left[\dots\right. = -r^{2n+1}\left[C - \int^r \frac{dr}{r^{2n+1}}\right]$$

$$= -r^{1+2n}\left[C + \frac{1}{2n r^{2n}}\right] = -r\left(1 + 2nc r^{2n}\right)$$

$$y = -\frac{1}{\frac{r}{2n} + c r^{2n+1}}$$

$$\frac{\frac{1}{2n} + (2n+1) c r^{2n}}{\left(\frac{r}{2n} + c r^{2n+1}\right)^2} - \frac{(2n+1)}{\frac{r^2}{2n} + c r^{2n+2}} =$$

$$= \frac{4}{r^2}\,\frac{\frac{1}{2n} + 1 + 2n(2n+1) c r^{2n} - \frac{(2n+1)}{2n} - 2n(2n+1) c r^{2n}}{\left(1 + 2nc r^{2n}\right)^2} = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)^2 f = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)\varphi = 0$$

$$\boxed{\varphi_1 = ar^n + \frac{b}{r^n}}$$

$$n(n-1) + n - n^2 = 0$$

$$n(n+1) - n - n^2 = 0$$

$$\Delta^2\Delta^2\psi = 0$$

$$\Delta^2\psi = f(x+iy) + f(x-iy)$$

$$\Delta^2\psi = \tfrac{1}{2}\left[f(r.e^{i\theta}) + f(r.e^{-i\theta})\right]$$

$$= f(r\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$+ f(r\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= a_0 + a_1 r e^{i\theta} + a_2 r^2 e^{2i\theta} + a_3 r^3 e^{3i\theta} + \dots$$
$$+ a_0 + a_1 r e^{-i\theta} + a_2 r^2 e^{-2i\theta} + \dots$$

$$= a_0 + a_1 r \sin\theta + a_2 r^2 \sin 2\theta + \dots$$
$$+ b_1 \frac{\sin\theta}{r} + b_2 \frac{\sin 2\theta}{r^2} + \dots$$
$$+ b_0 \log r$$

Stokesa metoda: nie nadawała że ψ jest najogólniejszym rozwiązaniem. Supozycja taka że $\Delta^2\psi = \zeta$ da się rozwinąć w szereg $\psi = \dots$

To dobre w razie koła, ale nie da się uogólnić na jakiekolwiek krzywe

Czy takie rozwinięcie obejmie takie punkty gdzie $\psi = \infty$?

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\right)\psi = \sum a_n r^n \sin n\theta$$
$$+ \sum b_n \frac{\sin n\theta}{r^n}$$

$$\psi = \sum A_n \sin n\theta$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\right)A_n = a_n r^n + \frac{b_n}{r^n}$$

$$A_n = r^{n+2} \ (?)$$

$$(n+2)(n+1) + (n+2) - n^2 = a_n = 4(n+1)$$

$$A_n = \frac{1}{r^{n-2}}$$

$$(n-2)(n-1) - (n-2) - n^2 = b_n = 4(-n+1)$$

z wyjątkiem $A_1 =$
$A_2 =$ Zły!

$$\boxed{A_n = \frac{a_n}{4(n+1)} r^{n+2} + \frac{b_n}{4(1-n)} \frac{1}{r^{n-2}} + C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}}$$

$$\psi = \sum A_n \sin n\theta$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \sum \frac{\partial A_n}{\partial r}\sin n\theta = \sum\left[\frac{n+2}{4(n+1)} a_n r^{n+1} + n C_n r^{n-1} + \frac{n-2}{4(n-1)} b_n \frac{1}{r^{n-1}} - n\frac{D_n}{r^{n+1}}\right]\sin n\theta$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \sum\left[\frac{a_n}{4(n+1)} r^{n+1} + C_n r^{n-1} + \frac{b_n}{4(1-n)}\frac{1}{r^{n-1}} + \frac{D_n}{r^{n+1}}\right] n\cos n\theta$$

$n=2$: $A_2 = \frac{a_2}{12} \cdot r^4 - \frac{b_2}{4} + C_2 r^2 + \frac{D_2}{r^2}$

$$(\ \ )A_2 = a_2 r^2 + 2C_2 + \frac{6D_2}{r^4}$$
$$-\frac{a_2}{3} r^2 - 2C_2 - \frac{2D_2}{r^4}$$
$$-\frac{a_2}{3} \quad -4C_2 - \frac{4D_2}{r^4} \quad + \frac{b_2}{r^2}$$

$$= \frac{a_2 r^2}{3} - 4C_2 + b_2 + 4\frac{D_2}{r^4}$$

$$\frac{2a_2}{3} \qquad + \frac{D_2}{r^6}$$
$$+\frac{2a_2}{3} \qquad - 16 \frac{D_2}{r^6}$$
$$-4\frac{a_2}{3} + \dots \qquad -16$$

$n=0$: $\quad \varphi_0 = a_0 \lg r + b_0 = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right) A_n = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA}{dr}\right)$

$$\int [a_0 r \lg r + b_0 r]\, dr = r\frac{dA}{dr} = a_0 \frac{r^2}{2}\lg r - a_0\frac{r^2}{2} + b_0\frac{r^2}{2}$$

$$\frac{dA}{dr} = a_0 r \lg r - b_0 r$$

$$A = a_0 r^2 \lg r - b_0 r^2$$

$a_0 r + 2a_0 r \lg r - 2b_0 r$

$a_0 + 2a_0 \lg r + 2a_0 - 2b_0$

$a_0 + 2a_0 \qquad -2b_0$

$$A_0 = a_0 r^2 \lg r + b_0 \lg r + c_0 + d_0 r^2$$

$n=1$: $\quad \varphi_1 = a_1 r + \frac{b_1}{r} = \cdots$

~~$A_1 = \frac{a_0}{r} + b_0 r + c_0 r \lg r + d_0 r^3$~~

$$A_1 = a_0 r \lg r + b_0 r + \frac{c_0}{r} + d_0 r^3$$

$n=2$: $\quad \varphi_2 = a_2 r^2 + \frac{b}{r^2} = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) A_n$

$A_n = \frac{b}{4} + \ldots + \frac{r^4 a_2}{4.3}$

$$\frac{d^2x}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dx}{dr} - \frac{4x}{r^2} - \frac{b}{r^2} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dx}{dr}\right) = \frac{(4x+b)}{r^2}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dz}{dr}\right) = \frac{4z}{r}$$

$$A_2 = -\frac{b}{4} + mr - \frac{n}{r} + a_2 r^2 + \frac{b}{r^2} + \ldots$$

$z = r^2$

$z = \frac{1}{r^2}$

$-\frac{2n}{r^3} + 2a_2 + \frac{6b}{r^4}$

$+\frac{m}{r} + \frac{n}{r^3} + 2a_2 - \frac{2b}{r^4}$

$+b - \frac{4m}{r} + \frac{4n}{r^3} - 4a_2 - \frac{4b}{r^4}$

$b - 3\frac{m}{r} + \frac{3n}{r^3}$

$-\frac{6m}{r^3} + \frac{36m}{r^5}$

$+\frac{3n}{r^4} - 9\frac{n}{r^5}$

$+12 \quad -12$

$$A_2 = a_0 r^4 + b_0 r^2 + c_0 + \frac{d_0}{r^2}$$

$$\psi = (a_0 r^2 \lg r + b_0 \lg r + c_0 + d_0 r^2) + \left(a_1 r \lg r + b_1 r + \frac{c_1}{r} + d_1 r^3\right)\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n r^{n+2} + b_n r^n + \frac{c_n}{r^{n-2}} + \frac{d_n}{r^n}\right]\sin n\theta$$

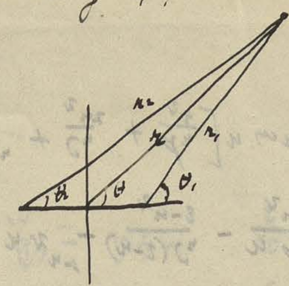
w ogólnym przypadku takie ułamkowe n dowolne?

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 2a_0 r \lg r + (a_0 + 2d_0) r + \frac{b_0}{r} + \left(a_1 \lg r + a_1 + b_1 - \frac{c_1}{r^2} + 3d_1 r^2\right)\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n(n+2) r^{n+1} + b_n n r^{n-1} - \frac{(n-2)c_n}{r^{n-3}} - \frac{n\, d_n}{r^{n+1}}\right]\sin n\theta$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \left(a_1 r \lg r + b_1 r + \frac{c_1}{r} + d_1 r^3\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left[a_n r^{n+2} + b_n r^n + \frac{c_n}{r^{n-2}} + \frac{d_n}{r^n}\right] n\cos n\theta$$

$$u = -\frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

rozwinąć wzgl. r, θ



$$v = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\theta \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$r_1^2 = 1 + r^2 - 2r\cos\theta$$

$$r_2^2 = 1 + r^2 + 2r\cos\theta$$

$$(r_1 r_2)^2 = \sout{(1+r^2)^2 + \ldots - 4r(1+r^2)}$$

$$= (1+r^2)^2 - 4r^2\cos^2\theta$$

$$= 1 + 2r^2(1 - 2\cos^2\theta) + r^4$$

$$= 1 - 2r^2 \cos 2\theta + r^4$$

$$\sqrt{2} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \sqrt{1 - \cos(\theta_1+\theta_2)} = \sqrt{1 - \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2}$$

$$r^2 = r_1^2 + 1 + 2r_1\cos\theta_1 = 2 + r^2 - 2r\cos\theta + 2r_1\cos\theta_1$$

$$r_1 \cos\theta_1 = r\cos\theta - 1$$

$$u = -\frac{r^2 \sin\theta}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[\sin\theta \sqrt{\frac{1+\cos(\theta_1+\theta_2)}{2}} - \cos\theta \sqrt{\frac{1-\cos(\theta_1+\theta_2)}{2}}\right]$$

$$R = v_r = u\cos\theta + v\sin\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$S = v_\perp = -u\sin\theta + v\cos\theta = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{\cos\theta}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$R = \frac{\sin\theta}{\sqrt{r_1 r_2 \cdot 2}} \sqrt{1 - \cos(\theta_1+\theta_2)} = \frac{\sin\theta}{r_1 r_2 \sqrt{2}} \sqrt{r_1 r_2 - [\underbrace{(x+1)(x-1) - y^2}_{x^2 - y^2 - 1}]}$$

$$= \frac{\sin\theta}{r_1 r_2 \sqrt{2}} \sqrt{r_1 r_2 - r^2\cos 2\theta + 1} = \sin\theta \frac{\left[1 - r^2\cos 2\theta + \sqrt{1 + r^4 - 2r^2\cos 2\theta}\right]^{1/2}}{\sqrt{1 + r^4 - 2r^2\cos 2\theta}}$$

$$= \sin\theta \frac{\left[1 - r^2 + 2r^2\sin^2\theta + \sqrt{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\theta}\right]^{1/2}}{\sqrt{\quad - \cdot \quad - -}}$$

$$= \sin\theta \sqrt{\frac{1 - r^2\cos 2\theta}{1 + r^4 - 2r^2\cos 2\theta} + \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1 + r^4 - 2r^2\cos 2\theta}}_{\alpha}}}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{1 + \frac{1 - r^2\cos 2\theta}{\alpha}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\alpha}} \left[1 + \frac{1 - r^2\cos 2\theta}{2\alpha} - \frac{1}{8}\left(\frac{1 - r^2\cos 2\theta}{\alpha}\right)^2 \ldots\right.$$

$$(1 - r^2\cos 2\theta)(1 - 2r^2\cos 2\theta + r^4)^{-\frac{1}{2}} = (1 - r^2\cos 2\theta) \frac{1}{\sqrt{(1+r^4) + 2r^2 - 2r^2(1 + \cos 2\theta)}}$$

$$= \frac{1 - r^2\cos 2\theta}{(1+r^2)\sqrt{1 - \frac{2r^2(1+\cos 2\theta)}{(1+r^2)^2}}} = \frac{1 - r^2\cos 2\theta}{(1+r^2)} \left[1 - \frac{4r^2\cos^2\theta}{(1+r^2)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$R = -\sum_0^\infty \left[-\frac{a_n(n+1)}{r^n} \cos(n+1)\theta - \frac{b_n}{r^n} \cos(n-1)\theta \right] = +\frac{b_1}{r} + b_0 \cos\theta + \sum_1^\infty \cos n\theta \left[n\frac{a_{n-1}}{r^{n-1}} + \frac{b_{n+1}}{r^{n+1}} \right]$$

$$S = -\sum_0^\infty \left[-\frac{a_n(n-1)}{r^n} \sin(n+1)\theta - \frac{b_n}{r^n} \sin(n-1)\theta \right] = \quad -b_0 \sin\theta + \sum_1^\infty \sin n\theta \left[(n-2)\frac{a_{n-1}}{r^{n-1}} + \frac{b_{n+1}}{r^{n+1}} \right]$$

Symetrja względem X

Równanie krzywej: $\frac{1}{r} = \sum_{m=0}^\infty (A_m \cos m\theta + [B_k \sin k\theta])$

$$\frac{1}{r^n} = \sum (A_{mn} \cos m\theta + [B_{kn} \sin k\theta])$$

$$R = \sum_0^\infty \left\{ \left[a_n(n+1)\cos(n+1)\theta + b_n \cos(n-1)\theta \right] \sum_{m=} \left[A_{mn} \cos m\theta + [B_{kn} \sin k\theta] \right] \right\} = 0 \quad = \sum M_k \cos k\theta$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos k\theta \, d\theta$$

$$\frac{1}{\pi}\int \cos n\theta \cos m\theta \cos k\theta \, d\theta \quad = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\left[\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta\right] \cos k\theta \, d\theta \quad = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left[\cos(n+m+k)\theta + \cos(n+m-k)\theta + \cos(n-m+k)\theta + \cos(n-m-k)\theta\right]$$

$$\int \sin n\theta \cos m\theta \cos k\theta \, d\theta \quad = \int \frac{1}{2}\left[\sin(n+m)\theta + \sin(n-m)\theta\right] \cos k\theta \, d\theta \quad = \frac{1}{2k}$$

jeżeli $k = n+m$ lub $k = n-m$

$$\int_0^\pi \cos^2 k\theta \, d\theta = \frac{1}{k}\frac{\pi}{2}$$

$n+1-m = k$

$n+1+m = k$

$$2M_k = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n(n+1)\left(A_{k-n-1,n} + A_{n+1-k,n}\right) + b_n A_{k-n+1,n} + b_n A_{n-1-k,n}}{k} = 0$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^\infty \dfrac{a_n(n+1)\left(A_{k-n-1,n} + A_{n+1-k,n}\right) + b_n\left(A_{k-n+1,n} + A_{n-1-k,n}\right)}{k} = 0 \\[2ex] \sum \dfrac{a_n(n-1)\left(\qquad\qquad\right) + b_n\left(\qquad\qquad\right)}{k} = 0 \end{cases}$$

$$\sum a_n \frac{n}{k}\left(A_{k-n-1,n} + A_{n+1-k,n}\right) = 0 \qquad \text{wtedy } A_{i,n} =$$

Jeżeli $x = \sum_0^\infty A_m \cos m\theta$

$$x^2 = \sum_0^\infty B_m \cos m\theta \qquad B_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \left(\sum_0^\infty A_n \cos n\theta\right)^2 \cos m\theta$$

$$= \sum A_n^2 \cos^2 n\theta \cos m\theta \quad + 2\sum A_n A_k \cos n\theta \cos k\theta \cos m\theta$$

$$= \frac{A_n^2}{2}\left(1 + \cos 2n\theta\right)\cos m\theta \quad + \frac{2A_n A_k}{2}\left[\cos(n+k)\theta + \cos(n-k)\theta\right]\cos m\theta$$

dla $m = 2n$ $\qquad n+k = m \qquad n-k = n$

$$= \quad = \frac{\pi}{m}$$

$$B_m = \frac{A_{\frac{m}{2}}^2}{2}\frac{1}{2m} + \sum_{n=0}^{n}\frac{2A_n A_{m-n}}{2m} + \frac{2A_n A_{n-m}}{2m}$$

572
28

Dla $\lim_{\infty} \frac{u}{v} = 0$

$$\psi = c_0 + b_0 \lg r + \frac{c_1 \sin\theta}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{c_n}{r^{n-2}} + \frac{d_n}{r^n} \right) \sin n\theta$$

pod założeniem że ψ funkcja [illegible] i rozwinięcie się dające w ten sposób

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{b_0}{r} - \frac{c_1 \sin\theta}{r^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(n-2) c_n}{r^{n-1}} + \frac{n\, d_n}{r^{n+1}} \right] \sin n\theta$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = + \frac{c_1 \cos\theta}{r^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{c_n}{r^{n-1}} + \frac{d_n}{r^{n+1}} \right] n \cos n\theta$$

więc wogóle ruch $\lim_{\infty} \frac{u}{v} = 0$ niemożliwy jeśli równocześnie na powierzchni walca $u = v = 0$

Jeśli ściana $+X$:

$b_0 = 0$

$$\frac{c_1}{r^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \left[\frac{c_n}{r^{n-1}} + \frac{d_n}{r^{n+1}} \right] = 0 \qquad (n > 3)$$

$$\frac{c_1}{r^2} + 3 c_3 + 4\frac{c_4}{r} + \frac{5 c_5}{r^2} + \frac{6 c_6}{r^3} \dots = 0$$

$$+ \frac{2 d_2}{r^3} + \frac{3 d_3}{r^4} + \frac{4 d_4}{r^5}$$

$b_0 = c_3 = 0 = c_4$

$c_5 = -\frac{c_1}{5}$

$c_6 = \frac{2 d_2}{6}$

$c_7 = \frac{-3 d_3}{7}$

$c_8 = \frac{-4 d_4}{8}$

$c_n = -\frac{(n-4)\, d_{n-4}}{n}$

$\pm X$:

$b_0 = 0$

$$\frac{c_1}{r^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \left[\frac{c_n}{r^{n-3}} + \frac{d_n}{r^{n+1}} \right] (-1)^n = 0$$

$$\frac{c_1}{r^2} - 3 c_3 + 4\frac{c_4}{r} - \frac{5 c_5}{r^2} + \frac{6 c_6}{r^3}$$

$$\frac{2 d_2}{r^3} - \frac{3 d_3}{r^4} + \frac{4 d_4}{r^5} \dots$$

$c_3 = c_4 = 0$

$c_5 = +\frac{c_1}{5} = 0$

$c_6 = -\frac{2 d_2}{6}$

$c_7 = -\frac{3 d_3}{7}$

$\vdots$

$$\psi = \sum_{n=6} \left[-\frac{(n-4)}{n\, r^{n-2}} \sin n\theta + \frac{1}{r^{n-4}} \sin (n-4)\theta \right] c_n$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \sum_{6} \left[\frac{(n-2)(n-4)}{n\, r^{n-1}} \sin n\theta - \frac{n-4}{r^{n-3}} \sin (n-4)\theta \right] c_n$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \sum \left[-\frac{(n-4)}{r^{n-1}} \cos n\theta + \frac{n-4}{r^{n-3}} \cos (n-4)\theta \right] c_n$$

$+Y$:

$$-\frac{c_1}{r^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(n-2) c_n}{r^{n-3}} + \frac{n\, d_n}{r^{n+1}} \right] (-1)$$

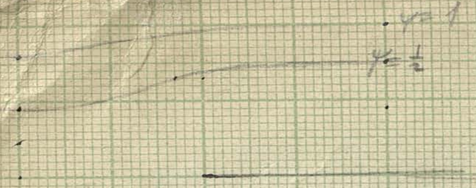
$$-\frac{c_1}{r^2} + c_3 + \frac{3 d_3}{r^4} - \frac{3 c_5}{r^2} - \frac{5 d_5}{r^6} + \frac{5 c_7}{r^4} + \frac{7 d_7}{r^8} \dots = 0$$

$$-\frac{2 d_2}{r^3} + \left(\frac{c_4}{r} + \frac{d_4}{r^5} \right) 4 - \left(\frac{c_6}{r^3} + \frac{d_6}{r^7} \right) 6 + 8 \left(\frac{c_8}{r^5} + \frac{d_8}{r^9} \right) \dots = 0$$

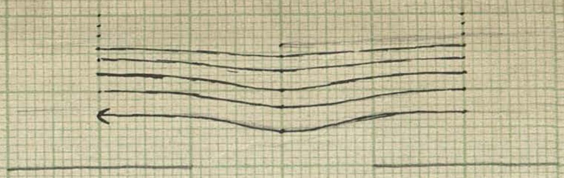
zgadza się z dawniejszymi równaniami

$$R = \frac{\sin\theta}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \sin\theta \sqrt{\frac{1 - r^2\cos 2\theta + \sqrt{1 + r^4 - 2r^2\cos 2\theta}}{1 + r^4 - 2r^2\cos 2\theta}} = \frac{\sin\theta}{r}\sqrt{\frac{\frac{1}{r^2} - \cos 2\theta + \sqrt{\frac{1}{r^4} + 1 - \frac{2}{r^2}\cos 2\theta}}{\left(\frac{1}{r}\right)^4 - \frac{2}{r^2}\cos 2\theta + 1}}$$

$$S = \frac{r^2}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + \frac{\cos\theta}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$



ψ=1
ψ=½



3

II

[redacted]